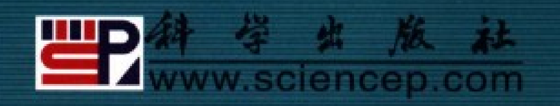
现代物理基础丛书



理论力学

张建树　孙秀泉　张正军 编著



现代物理基础丛书　6

理　论　力　学

张建树　孙秀泉　张正军　编著

科　学　出　版　社

北　京

内 容 简 介

本书是西北大学“面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”重点课程项目研究成果，全书以经典力学基本内容为基础，较好地融合了该学科内容的最新进展，系统地阐述了经典力学的基本理论，简要介绍了非线性力学最基本的内容。材料取舍主要考虑物理学专业后继理论物理课程的所需内容，加大了与近代物理有紧密联系的分析力学的比例。基础理论部分以对称性为主线组织教材内容，强调了对称性在物理学中的重要性；应用部分多以分析力学方法处理，以加深对分析力学的理解。非线性力学部分介绍了分形、分维、混沌和奇异吸引子等概念。全书共七章：牛顿力学、拉格朗日力学、哈密顿力学、有心力场中运动、非惯性系中的运动、刚体力学、非线性力学。

本书可作为综合大学、高等师范大学物理学专业及有关专业理论力学课程的教材，也可作为相关理工科专业师生和科技人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

理论力学/张建树，孙秀泉，张正军编著．—北京：科学出版社，2005
（现代物理基础丛书；6）
ISBN 7-03-014356-6

Ⅰ.理… Ⅱ.①张…②孙…③张… Ⅲ.理论力学 Ⅳ.031

中国版本图书馆CIP数据核字（2004）第101575号

责任编辑：胡 凯 鄢德平/责任校对：刘小梅
责任印制：钱玉芬/封面设计：黄华斌

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2005年8月第一版 开本：B5（720×1000）
2005年8月第一次印刷 印张：20
印数：1—3 000 字数：380 000

定价：42.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈双青〉）

《现代物理基础丛书》编委会

前　言

近年来非线性力学的蓬勃发展，赋予了古老的经典力学新的活力。经典力学曾经被视为“确定论”的典范，这种思维定式曾统治物理学界达250年。现在我们知道，牛顿力学具有内在随机性，因此，有必要以现代观点重新审视理论力学的内容，并反映本学科的最新进展。

为适应我国高等教育发展的需要，国家在创建面向21世纪百所重点高校“211工程”的同时，为了加强理科基础科学研究和教学，为其输送高质量的合格人才，经过严格评选，在一些重点大学建立了“物理学专业国家理科基础科学研究和教学人才培养基地”，即所谓“物理学基地”，以加强物理学人才的培养。本书是在编者多年来在西北大学“物理学基地”讲授理论力学课程讲义的基础上逐渐修改补充而成的。

本书具有以下主要特点：

1. 目标明确，针对性和适用性更强。本书主要读者是物理学专业的师生和科技工作者，特别是物理学专业“国家理科基础科学研究和教学人才培养基地”的学生。针对这一特定目标，本书是按公理化体系编写的。理论力学是物理学专业一门必修的基础理论课，也是学习其他理论物理课程的入门课，材料取舍主要考虑后继理论物理课程［热力学、统计物理、量子力学和场的理论（如电动力学、量子场论等)］的需要，详略适度。

2. 以对称性为主线组织基本理论部分的内容。对称性在现代物理学中起着极其重要的作用。本书的基础理论部分，以对称性为主线，从时空对称性导出守恒量，并经过牛顿力学和分析力学两个循环，逐步深化对于对称性的认识。

3. 加大了与近代物理有紧密联系的分析力学内容的比重。本书兼顾牛顿力学和分析力学，侧重点在分析力学。中心力场的运动和刚体力学，国内大部分理论力学用书都是用牛顿力学方法处理，本书则用分析力学方法处理。因为，分析力学是近代物理学的接口，能为掌握理论物理学的概念、方法、模型和技巧提供必要的基础。本书对近代物理中那些重要的分析力学表述都给予了充分的强调，以减少向量子理论过渡的困难。

4. 力图采用严谨的数学方法，启发抽象思维。理论力学是与普通物理力学不同的一门理论课程。理论物理有自己独特的研究方法，这就是运用数学语言，

进行严密逻辑推理过程。本书用坐标变换的性质阐明矢量和张量，尽可能采用近代物理中的数学方法，如本征值方程、矩阵代数、变分法等，以适应物理学发展的需要，并便于和后继理论物理课程衔接。

5. 反映本学科的最新进展。近些年来，经典力学这门古老学科又焕发了青春，取得了长足进步。这就是以混沌的发现为代表的非线性力学的巨大进展。本书用一章的篇幅简要介绍了分形和分维、混沌及奇异吸引子等概念。这部分内容对于开拓视野，大有裨益。

本书突出了基本知识、基本理论和基本技能，全书共分七章。前三章是基础理论部分，其中第一章为牛顿力学，第二、三章为分析力学。第四章讲述有心力场中的运动。第五章为非惯性系中的运动，为第六章做准备。第六章为刚体力学。第七章为非线性力学。书末编入了矢量、张量和矩阵运算等数学附录，以方便查阅。

书中有 * 号的内容，相对独立，可作为选学内容。

编写本书过程中西北大学谢大来、何宗海、董庆彦和姚合宝等教授提出过许多宝贵意见和建议，使本书增色不少。此外还得到陆江、唐泉和史小延等同志的帮助，在此谨致感谢。

本书属于西北大学面向 21 世纪教学内容改革研究计划首批重点课程教材之一，得到了校系领导的关怀和支持，特别感谢学校在编写、出版经费方面所给予的支持。

由于时间仓促，又限于学识水平，不当之处甚至错误在所难免，恳请读者批评指正。

作　者

2004 年 9 月于西北大学

目　　录

第一章 牛 顿 力 学

1687年牛顿划时代的巨著《自然哲学① 的数学原理》一书问世，这是力学发展史上一个重要的里程碑。自此以后，力学有了一个普遍的理论体系，并且成为物理学的基础。牛顿创立的力学的特点是用矢量形式建立起力学的基本定律，然后按作用于每个质点的力去确定每个质点的运动规律。通常称牛顿力学为**矢量力学**。

由牛顿同时代的学者莱布尼兹开始，后经拉格朗日、哈密顿、欧拉等人的努力，力学也沿着另外一条途径发展，逐渐地形成了另一套方法，这就是将力学的基本定律表示为分析数学的形式，并运用分析的方法去解决任意力学系统的运动问题。这种处理力学问题的方法叫做**分析力学**。

由于矢量方法较纯分析的方法直观，所以我们先从矢量力学开始学习。

1.1 牛顿第一定律

1.1.1 参考系

为了研究一个物体的运动，必须选择其他物体（一般指三维刚体）作参考。显然，若无参考物体，运动也就无从谈起。我们说一物体运动时，总是相对于其他物体而言的。不讲相对于另一些物体的所谓绝对运动是毫无意义的。这种选作参考标准的物体或物体的集合，叫做**参考系**。由参考物体刚性延伸得到的三维空间称为**参考空间**。

运动的相对性是和空间概念本身的相对性相联系的。

1.1.2 坐标系

选定了适当的参考系后，只能定性地判断物体是否运动，要定量地描述物体相对于参考系的位置变化，还必须在参考系上选择一个适当的**计算系统**，即**坐标系**。② 坐标系是描述运动的重要工具，是观察者用以观察运动假想的基架。

---

① “自然哲学”是以前英国对物理学的习惯称呼。现在英国某些刊物仍然沿用这个称呼。

② 有人只把三维空间坐标称为坐标系，除确定空间坐标外，再配以记载时间的方法，认为构成计算系统，在四维时空连续区，时间和空间处于同等地位。为了便于概念推广，我们在谈到坐标系时，一般包含时间在内。也正是在这种意义上本书把计算系统和坐标系等同看待。

参考空间也可以用坐标系来确定。以后凡说“相对于某个坐标系运动”意思总是指“相对于某个坐标系所确定的参考空间运动。”

坐标系的选择可以有无穷多种方法。一个物体的运动在不同的坐标系中，一般来说是不同的。如果坐标系选在物体的自身上，那么在此坐标系中物体将是静止的，而相对于其他坐标系将是运动的。而且在不同的坐标系中运动情况也不相同，也就是说按不同的轨道运动。例如，列车沿着轨道行驶时，对于固连于车厢的坐标系来说，车厢里坐着的乘客是静止的；但对于固连于地球上的参考系来说，则乘客又在随着车厢一起运动。又如，当无风下雨时，雨点对于地面来说是铅直下落的，对于行驶着的汽车来说则是向后偏斜的。

1.1.3 牛顿第一定律

既然坐标系的选择有无穷多种，很自然，选择坐标系应该使自然现象的力学规律在其上显得最简单。如果我们所研究的物体距其他物体很远，以致于后者对它的运动毫无影响，称这样的物体运动为**自由运动**。

当然，自由运动的条件只有在某种精确度的情况下才能实现，自由运动像其他类型运动一样，在不同的坐标系中观察的结果也往往不同。但是，选择坐标系固定在某个自由运动的物体上，则在此坐标系中观察其他物体的自由运动就特别简单：它们在做匀速直线运动。换句话说，它们的速度大小和方向都是不变的。这个结论就是所谓**惯性定律**的内容。惯性定律也叫**牛顿第一定律**，是伽利略在牛顿之前确立了的。所以该定律亦称**伽利略－牛顿第一定律**。

关于什么是惯性坐标系的问题，还可换个角度来看。下面的论述会牵涉到质点、速度、初位置等概念。我们假定读者在基础物理的学习中已经有了这些概念。当然，本章有关部分还会对这些概念再做详细阐述。我们可以把距其他物体极远的质点视为**孤立质点**。其他物体能使孤立质点获得的加速度是无穷小的。同时，实验也表明，对于某些坐标系而言，孤立质点的加速度为零；对另一些坐标系而言时，孤立系统却可以做加速运动。所谓**惯性坐标系**，相对于它来说，一孤立质点或者处于静止状态，或者将从任一初始位置出发，沿任一方向做匀速直线运动。在惯性坐标系中，孤立质点的位矢 $\boldsymbol{r}$ 是时间的**线性**函数

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}_0 t + \boldsymbol{r}_0 \tag{1.1.1}$$

其中，$\boldsymbol{v}_0$ 与 $\boldsymbol{r}_0$ 可取任意常数值。凡对孤立质点条件式（1.1.1）不能满足的坐标系，叫做**非惯性坐标系**。关于非惯性坐标系问题将在第五章进行专题讨论。

骤然看来，似乎惯性系的引进，除了给出计算系统本身的性质以外，还给出了绝对空间和相对于这个坐标系绝对静止的概念的可能性。实际上并不是这样，这是因为惯性坐标系有无穷多个。事实上，若某个坐标系相对于另一惯性坐标系以恒定速度（大小和方向都不变）运动，则它也是惯性坐标系。

必须强调指出，惯性坐标系的存在并不是纯粹逻辑上的必然性。从原则上说，惯性坐标系的存在和相对于惯性坐标系物体的自由运动是匀速直线运动，是一个基本的自然定律。

1.1.4 伽利略相对性原理

很显然，研究自由运动的时候，我们不可能把不同的惯性坐标系区分开。是否可能产生这样的问题：是否在研究其他物理现象时，可以把某一个惯性坐标系和其他惯性坐标系区分开，这样就可以从惯性坐标系中分出一个特殊的？如果这样分出是可能的，那么我们就可以说存在着绝对空间和相对于这个特殊坐标系绝对静止的概念。但是，这样选择的坐标系是不存在的，因为所有的物理现象在不同的惯性坐标系中都是一样的。

一切自然定律在所有惯性坐标中具有相同的形式，因而这些惯性系实际上彼此无法区别，或者说是完全等价的。这是物理学中一个极为重要的原理，称为**运动的相对性原理**，或称为**伽利略相对性原理**。从而，绝对空间、绝对静止和绝对运动的概念就完全失去了意义。

因为一切物理定律在所有惯性坐标系中都以相同的方式表达（虽然在不同的惯性坐标系中这些具体表述有区别），因而，很自然地，一般研究物理现象都乐于采用惯性坐标系。以后我们若未加特别说明，都是指惯性坐标系而言的。

事实上，物理学上所用的实验室坐标系仅在一定精确度范围内是惯性坐标系。因为坐标系固定在地球上，这个坐标系不是惯性系的原因是地球绕着自身的轴自转并绕着太阳公转。在地球上不同地点的运动是不相同的，速度也不是恒定的，因而固定在地球上的坐标系不是惯性坐标系。但是，因为地球绕地轴自转和绕太阳公转都比较慢，实际上引起的误差是微不足道的，对于大部分实验的影响可以忽略不计，因而我们往往把固定在地球上的坐标系当作惯性坐标系看待。尽管固定在地球上的坐标系上的运动与真正惯性系中的运动相差甚微，但还是可以观察到的。例如，借助傅科摆就可以做到这一点（参见 5.6 节）。

下面再来进一步探讨一下惯性系的问题。因为一般说来，不同坐标系中运动规律有着不同的形式，假如选取一个任意的坐标系，则可能使很简单的现象的规律在这个坐标系中看起来却很复杂。自然就产生了一个寻找这样一种坐标系的课题，在这种坐标系中力学规律要显得特别简单。

对于任意一个坐标系来讲，空间并不是均匀和各向同性的。这就是说，即使某一物体不与其他物体相互作用，但它在空间的不同位置和它的不同指向在力学意义上也并非等效的。在一般情况下，这也适于非均匀的时间。也就是说，不同的时刻也不等效。由于空间与时间的这些性质，在描写力学运动时的麻烦是显而易见的。例如，自由的（不受外界作用的）物体不可能静止，即使在某一时刻物

体的速度等于零，但在下一时刻物体就会在某一方向开始运动。

然而，**总可以找到这样的坐标系，相对于它来说，空间是均匀和各向同性的，而时间也是均匀的。这种坐标系叫做惯性坐标性系，简称惯性系。**

1.2 质点的速度和加速度

1.2.1 质点和质点系

质点的概念是力学中最基本的概念之一。质点是具有有限质量的几何点，是用来描述物体平动的概念。平动是指这样一种运动，物体的所有微小部分（简言之，它的所有质点）的运动速度，不论在数值上还是在方向上都是相同的。

质点应当理解成这样的物体，当描述它的运动时，可以忽略它的大小和内部结构。当然这样的忽略与问题的具体条件有关。例如，当研究行星围绕太阳运动时，可以把行星看成质点，然而在观察它们自转的时候，当然就不能这样看了。

一切物理概念都是实际的简化。在质点概念中，简化不在于为考察方便而划分某些特殊的物体，而在于划分出任何物体的一些特定的运动状态，或更确切地说是局部运动状态。质点的概念可用来描写任何大小、任何几何形状以及处于任何聚集态（固态、液态或气态）的物体的平动。

质点这一概念也可以用于物体的某些非严格平动的情形，即与平动的差别不重要的情形。如果物体的转动不影响其质心的运动，则物体可以看作质点。这些到有关章节再来讨论。

综上所述，当物体运动所涉及的空间尺度比它自身的尺度大得多，而且可以忽略物体自身的变形和转动时，在大多数问题中我们可以把它简化为质点来研究。

实际上，自然界中既不会有理想质点，也不会有绝对刚体和完全弹性体。这一切都不过是科学上所不得不使用的抽象概念，其目的在于用来把实在客体中那些在解决所给问题时必须考虑的性质正确地反映出来，采用抽象概念永远不可能完全地反映出实在客体的全部性质。但是抽象概念未反映的那些性质对所研究运动的特性并无明显影响，当然也没有必要去反映客体的全部性质。在研究物体的运动时，假如企图把该物体的全部性质都考虑进去，问题就会复杂得实际上无法解决。

我们要提醒读者注意，科学理论都是只对概念，而不是对现实进行讨论的。所有理论性结果都是从某些公理通过演绎逻辑推导出来的。在物理学中，理论的陈述在某种意义下符合现实世界，不管这意味着什么。然而，这种符合只是近似的，所有理论性的结论的物理验证则基于某种形式的归纳推理。

无论多么合乎逻辑和有连贯性的物理理论，都采用了不能反映客体全部性质的抽象概念。而这些概念是否合理，理论本身并不能做出结论。只有理论及其推论与实验一致才能提供这种证明。

大家知道，力学的研究对象是物体，其任务是考察一给定的物体在其周围环境外力作用下的运动变化，并预言它将来的运动情况。因此，首先应当把要考察的物体从它周围环境中分离出来，这就是我们常说的分离体。刚才提到的“质点”就是最特殊的分离体。我们还经常以“粒子”替代质点这个词，但要注意经典力学中的质点并不是微观粒子。不要把我们这里“粒子”的概念和真实的微观粒子相混淆。

任何一个分离体都具有长度、体积及内部结构，一般情况下这些特性都必须加以考虑，因此通常不能把物体当成质点，而必须看成质点的集合，即**质点系**。所谓质点系是指许多（有限或无限）相互联系着的质点所组成的系统。质点和质点系是力学中两个基本模型。

若质点系中任意二质点距离始终不变，则我们把这一特殊质点系叫**刚体**。若以 $r_{\alpha\beta}$表示刚体中 α 点和 β 点的距离，则构成刚体的条件是

$$r_{\alpha\beta}=c_{\alpha\beta} \tag{1.2.1}$$

其中，$c_{\alpha\beta}$是常数。虽然在实际上并不存在这样理想的刚体，自然界实际存在的某些系统只可能近似地符合这个条件。但是，对于我们日常所碰到的很多固体来说，如果把它视为刚体，得到的力学结果是足够准确的；另一方面，这种近似可以大大地简化我们的研究工作和解题过程。

1.2.2 质点的速度和加速度

一个质点在空间中的位置由它的位矢 $\boldsymbol{r}$ 确定。一般来说 $\boldsymbol{r}$ 是时间的函数

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t) \tag{1.2.2}$$

我们假设矢量函数 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 是连续的（参阅 1.6 节）。设某一所考察的点在空间移动，从 $t=t_0$ 时开始计时，在 $t\geqslant t_0$ 的时间进程中，质点位置的连续序列称为质点的**轨道**，它是位矢 $\boldsymbol{r}$ 的**矢端曲线**。

位矢 $\boldsymbol{r}$ 对时间的微商叫**速度**

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \tag{1.2.3}$$

矢量的微商沿矢量矢端曲线的切线方向，所以，质点的速度 $\boldsymbol{v}$ 沿轨道的切线方向，指向质点的运动方向。

质点的速度对时间的一次微商，或者质点位矢对时间的二次微商叫做质点的**加速度**

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \tag{1.2.4}$$

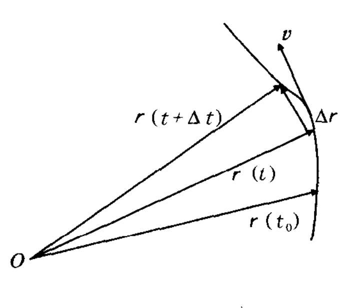


图 1.1 速度矢量

按照一般理论物理的惯例，我们将常常用在字母上方的一个小圆点表示对时间的微商，例如，$\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{r}}$，$\boldsymbol{a}=\ddot{\boldsymbol{r}}$。

但是，在某种意义上说，给出坐标的数值还不能确定系统在该时刻的力学状态，因为我们并不能由此预言系统在下一个时刻的位置。在给定了坐标数值的情况后，系统可以有任意的速度。而由于速度的不同，系统在下一个时刻（也就是说，经过无穷小的时间时隔 $\mathrm{d}t$ 后）的位置也将不一样。

实验证明，**同时给定所有的坐标和速度就能完全确定系统的状态，并且在原则上可以预言它以后的运动。从数学的观点来看，这就是给定某一时刻的坐标和速度也就单值地确定了在该时刻的加速度 $\ddot{\boldsymbol{r}}$**。

把加速度和坐标、速度联系起来的关系式叫**运动方程**。对函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 来说，这是一个**二阶微分方程**。这些方程的积分在原则上可以确定力学系统的**轨道**。

1.2.3 角速度和角加速度

一个在空间做任意运动的点或质点，在某一**瞬时**总是可以看成在一平面上绕某个轴做圆周运动，也就是说，质点在无限小的时间间隔 $\mathrm{d}t$ 内所走的路径可以表示为无限小的圆弧。通过圆心且垂直于运动的瞬时平面的直线称为**瞬时转动轴**。当质点做圆周运动时，角位置 θ 的变化率称为**角速度**

$$\omega=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\dot{\theta} \qquad (1.2.5)$$

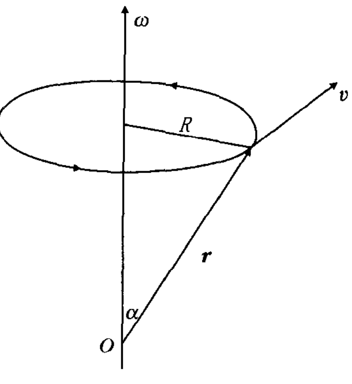


图 1.2 角速度的矢量表示

考虑一质点，其瞬时运动是绕某个垂直于运动平面的轴做半径为 R 的圆周运动，如图 1.2 所示。质点的位矢 $\boldsymbol{r}$ 从位于旋转轴上作为原点的任一点 O 引出。根据式（1.2.3），位矢对时间的微商是质点的线速度矢量

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$$

对于半径为 R 的圆周运动，线速度的数值为

$$v=R\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=R\omega \qquad (1.2.6)$$

线速度 $\boldsymbol{v}$ 的方向显然垂直于位矢 $\boldsymbol{r}$ 且在圆的平面内。

为了使质点运动中所有有关的量都在一个共同的基础上描述，也用一个矢量代表角速度是人们很自然的设想。矢量应有方向和量值。角速度的方向用下述方式定义：若质点某一瞬时在某一平面内运动，则这个平面的法线在空间规定出一个精确方向，或者说得确切些是两个方向。当右手螺旋的方向与质点转动的方向相同时，选螺旋前进的方向为角速度的方向，如图 1.2 所示。至于角速度的量值，原则上说，转动角度的任何函数都可以取作其量值。考虑到 $R = r\sin\alpha$，于是

$$v = \omega r \sin\alpha \tag{1.2.7}$$

可以作为角速度量值的定义。既然已定义了角速度的方向和量值，则可写作

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} \tag{1.2.8}$$

这样，上述方向和量值① 的两个定义都可满足，而我们也就得到了角速度的矢量表示法。

角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 对时间 t 的微商称为**角加速度**

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \tag{1.2.9}$$

注意：由于 $\boldsymbol{\omega}$ 的方向是变化的，所以 $\boldsymbol{\beta}$ 不一定与 $\boldsymbol{\omega}$ 平行。

1.3 坐 标 系

描述质点运动所需要的物理量是质点的位置、速度和加速度。尽管这些量的定义与具体坐标系无关，然而这些矢量的具体形式却依赖于质点运动所用的坐标系和选取的参考系。坐标系的选取具有相当大的任意性，原则上只要三个基矢不共面就可以。我们将会看到在任何一个具体问题中，所要选取的坐标基矢取决于用来描述运动所使用的坐标。

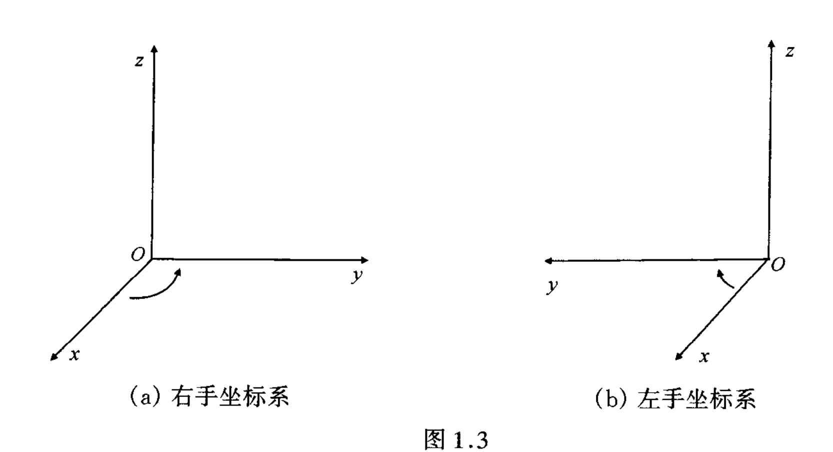
选取三个相互垂直的单位基矢来表示坐标轴是最简单的选择，此即所谓**正交坐标系**。当然这并非必需，而且也不是任何时候都是最方便的。有时根据物理问题的需要使用**非正交坐标系**才合适。非正交坐标系也叫**斜交坐标系**。比如，凝聚态物理中为描述某晶体的物理性质，利用根据晶体的轴选定的坐标系最为方便，这些轴经常是斜交的。本书只介绍正交坐标系，至于非正交标系读者在有关后继课程中再学习。

1.3.1 直角坐标系

直角坐标系通常叫**笛卡儿坐标系**。空间点与三个实数对应。

① 有量值和方向的量还不一定是矢量，矢量还必须遵从矢量加法的平行四边形法则。尽管无限小转动可用矢量（实际上是一个轴矢量）表示，但有限转动却不能用矢量表示（详见 6.3 节）。

直角坐标系可分为**右手系**和**左手系**（见图 1.3），它们互为镜像[①] 用任何移位操作也不能使这两种坐标系重合（这种性质称为**手征性**)。在右手系中，取逆时针方向为计算角度 φ 的正方向，在左手系中，则取顺时针方向为计算角度 φ 的正方向，今后我们均采用右手坐标系。



(a) 右手坐标系　　(b) 左手坐标系

图 1.3

垂直于坐标轴 x，y，z 的平面称为**坐标面**，它们构成三个彼此垂直的平面族。空间中每一点的位置可由它们的交点确定。以 $\boldsymbol{r}$ 表示点 P 在空间的位矢，以 x，y，z 表示它们的分量，即该点的直角坐标。沿 x，y，z 轴分别引入单位矢量 $\boldsymbol{e}_x$，$\boldsymbol{e}_y$，$\boldsymbol{e}_z$（或者 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$），可将 $\boldsymbol{r}$ 表示为

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z \tag{1.3.1}$$

$\boldsymbol{r}$ 是以 x，y，z 为棱的平行六面体的对角线。

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

点的元位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 可以表示为沿坐标轴的元位移 $\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}y$，$\mathrm{d}z$ 之和

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{e}_x\mathrm{d}x + \boldsymbol{e}_y\mathrm{d}y + \boldsymbol{e}_z\mathrm{d}z \tag{1.3.2}$$

空间曲线的元弧长 $\mathrm{d}s$，在二级小量的准确度内等于它所张的弦长

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 \tag{1.3.3}$$

---

① 若以 $y = 0$ 面作为镜面，镜像对称操作是将图形中任何一点 (x, y, z) 变成 $(x, -y, z)$，变换矩阵是

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

具有镜像对称性叫做**宇称守恒**，为了以后求和书写方便，经常以 x_1, x_2, x_3 代表 x, y, z 。

1.3.2 柱面坐标系

点 P 在空间的位置可以由三个量 ρ，φ，z 来确定。这里 ρ 是点 P 离轴 z 的距离：$\rho = OM$，φ 是以逆时针方向由轴 x 到 OM 的夹角，而 z 是点 P 离平面 xy 的距离。点的柱坐标 ρ，φ，z 变动的区间是

$$0 \leqslant \rho < \infty, \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \qquad -\infty < z < \infty$$

由图 1.5 可见直角坐标与柱面坐标的联系为

$$\left.\begin{aligned} &x = \rho\cos\varphi, \qquad y = \rho\sin\varphi, \qquad z = z \\ &\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \varphi = \arcsin\frac{y}{\rho} \end{aligned}\right\} \tag{1.3.4}$$

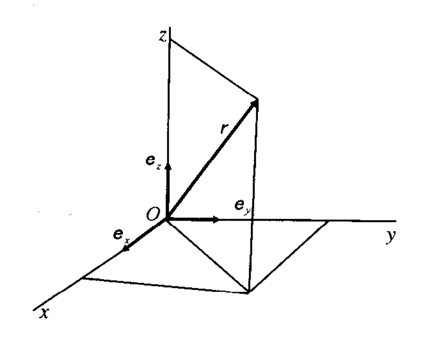


图 1.4 直角坐标系

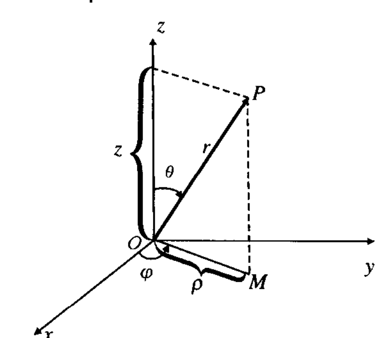


图 1.5 柱面坐标系

在柱面坐标系中，坐标面是：以 z 为轴，以 ρ 为半径的一簇圆柱面

$$\rho = c_1 \tag{1.3.5}$$

由轴 z 出发的，使位矢 $\boldsymbol{r}$ 和轴 z 位于其上的一簇平面

$$\varphi = c_2 \tag{1.3.6}$$

垂直于轴 z 的一簇平面

$$z = c_3 \tag{1.3.7}$$

不同簇的任意两坐标面的交线称为**坐标线**。沿每一坐标线只有一个坐标可以变动，因此，常以相应的坐标来称呼坐标线。

面（1.3.5）与（1.3.7）的交线给出一簇同心圆——坐标线 φ，而面（1.3.6）与（1.3.7）的交线给出由原点 O 出发的一簇半直线（射线）——坐标线 ρ（见图 1.5）。面（1.3.5）与（1.3.6）的交线给出坐标线 z，它是一族平行于直角坐标系 z 的直线。

坐标线 ρ 和 z 是直线，而坐标线 φ 是圆，所以柱面坐标系属于曲线坐标系。容易看出，确定空间点的三条坐标线 ρ，φ，z 是彼此成直角相交的，所以柱面

坐标是正交坐标。

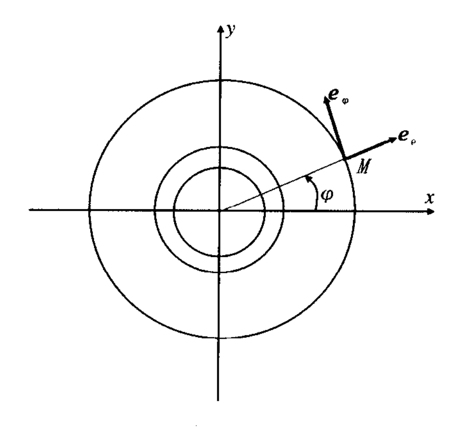


图 1.6　柱坐标的单位矢 e_φ，e_ρ

在坐标线上某点作的切线称为**坐标轴**。显然，若坐标线是直线，则坐标轴与坐标线相重合，这里 ρ 和 z 正是这样。柱面坐标的三条轴是彼此垂直的直线。沿着这些轴，在坐标增大的方向上作单位矢量 $\boldsymbol{e}_\rho$，$\boldsymbol{e}_\varphi$ 和 $\boldsymbol{e}_z$。在图 1.6 的 M 点处，绘出了单位矢 $\boldsymbol{e}_\rho$，$\boldsymbol{e}_\varphi$。整个图 1.6 属于任何 $z=$ 常数的平面，可以将空间任何点，例如图 1.5 的矢量 $\boldsymbol{r}$ 的端点取作 P。因为位矢 $\boldsymbol{r}$ 沿轴 φ 的分量等于零，因此位矢 $\boldsymbol{r}$ 沿柱面坐标系的单位矢的分解式具有形式

$$\boldsymbol{r} = \rho\boldsymbol{e}_\rho + z\boldsymbol{e}_z \tag{1.3.8}$$

元位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 也可表示为沿柱面坐标轴的分解形式，即总可以将 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 视为沿柱面坐标轴的元位移的矢量和，各元位移等于坐标线弧的元长乘以相应的单位矢。沿射线 ρ 的元位移等于 $\mathrm{d}\rho\boldsymbol{e}_\rho$；沿轴 φ 的元位移等于 $\rho\mathrm{d}\varphi\boldsymbol{e}_\varphi$，这里 $\rho\mathrm{d}\varphi$ 是沿坐标线 φ 的弧元，因此

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}\rho\boldsymbol{e}_\rho + \rho\mathrm{d}\varphi\boldsymbol{e}_\varphi + \mathrm{d}z\boldsymbol{e}_z \tag{1.3.9}$$

由上式得弧元的平方

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\rho^2 + \rho^2\mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}z^2 \tag{1.3.10}$$

1.3.3　平面极坐标系

若柱坐标中 $z=0$，即为平面极坐标系，简称极坐标系。不过按照习惯，通常取水平轴为**极轴**，从极轴逆时针方向计算角度，称为**极角** θ，它相当于柱面坐标系中的 φ 角，空间点仍以 P 记，原点 O 到 P 的距离 r 通常称为**极半径**。原点称为**极点**。

从图 1.7 可以看出

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta \\ r &= \sqrt{x^2+y^2}, \qquad \theta = \arctan\frac{y}{x} \end{aligned}\right\} \tag{1.3.11}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{e}_r\mathrm{d}r + \boldsymbol{e}_\theta r\mathrm{d}\theta \tag{1.3.12}$$

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2 \tag{1.3.13}$$

$$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r \tag{1.3.14}$$

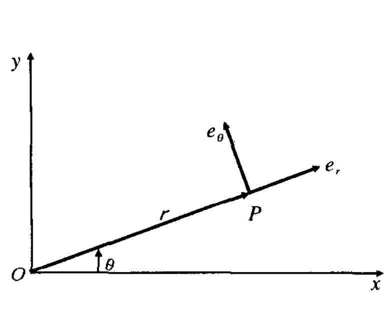


图 1.7 极坐标系

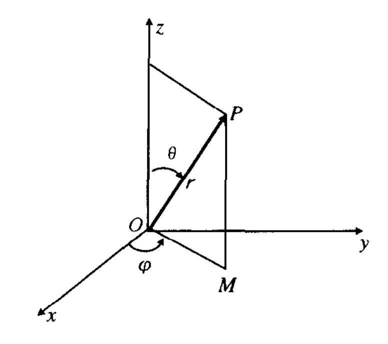


图 1.8 球面坐标系

1.3.4 球面坐标系

点 P 在空间的位置也可以用球面坐标 r，θ，φ 来确定。这里 r 是点 P 离坐标原点 O 的距离（位矢 $\boldsymbol{r}$ 的模），而 θ 和 φ 是确定 $\boldsymbol{r}$ 方向的两个角度，如图 1.8 所示。角度 θ 是通过轴 z 和 $\boldsymbol{r}$ 所作的平面中由轴 z 到 $\boldsymbol{r}$ 来计算的；角度 φ 与柱面坐标系相应的角度一致。坐标的变动范围是

$$0\leqslant\theta<\pi,\qquad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\qquad 0<r<\infty$$

由图 1.8 还可以看出直角坐标系与球面坐标系间的联系。线段 $OM=r\sin\theta$，将 OM 在轴 x 上作投影，得 x；将 OM 在轴 y 上作投影，得 y，所以有

$$\left.\begin{aligned}&x=r\sin\theta\cos\varphi,\qquad y=r\sin\theta\sin\varphi,\qquad z=r\cos\theta\\&r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\\&\theta=\arccos\frac{z}{r},\qquad \varphi=\arcsin\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{aligned}\right\}\tag{1.3.15}$$

三簇球面坐标面分别是：以坐标原点为中心的一簇同心球

$$r=c_1\tag{1.3.16}$$

以轴 z 为轴的圆锥面

$$\theta=c_2\tag{1.3.17}$$

以轴 z 出发的一簇半平面

$$\varphi=c_3\tag{1.3.18}$$

最后一簇与柱面坐标系中相同。

不同簇的坐标面的交线给出三簇坐标线。坐标面簇（1.3.16）与（1.3.17）的交线给出坐标线 φ，沿着它变动是角度 φ，这是一些圆心在轴 z 上、半径为 $r\sin\theta$ 的同心圆（因为 $\frac{\pi}{2}-\theta$，即 OP 与 OQ 间的夹角称为纬度，故亦称为纬圈

或纬线)。坐标面簇(1.3.16)与(1.3.18)的交线给出坐标线 θ,这是一些直径位于轴 z 上的、半径为 r 的半圆(子午线或经线)。坐标面簇(1.3.17)与(1.3.18)的交线给出坐标线 r,这是一些由原点出发的半直线。现在来作坐标线的切线——坐标轴,它的方向取坐标增大的一方。容易看出,坐标在空间各点成垂直相交,因此,球面坐标系也属正交曲线坐标系。

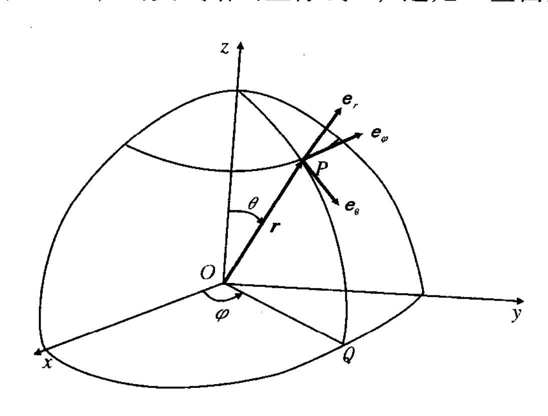


图 1.9 球面坐标系的单位矢

沿球面坐标系中坐标轴的单位矢量分别用 $\boldsymbol{e}_r$,$\boldsymbol{e}_\theta$ 和 $\boldsymbol{e}_\varphi$ 表示(见图 1.9)。位矢 $\boldsymbol{r}$ 在球面坐标系中具有形式

$$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r \tag{1.3.19}$$

元位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 总可以表示为沿坐标轴的元位移的矢量和。容易看到,沿各坐标轴的元位移分别为:$\boldsymbol{e}_r\mathrm{d}r$——沿射线(坐标轴 r)的元位移;$\boldsymbol{e}_\theta r\mathrm{d}\theta$——沿坐标轴 θ 的元位移,这里 $r\mathrm{d}\theta$ 是沿坐标轴 θ(经线)的弧元;$\boldsymbol{e}_\varphi r\sin\theta\mathrm{d}\varphi$——沿坐标轴 φ(纬线)的元位移。因此

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{e}_r\mathrm{d}r + \boldsymbol{e}_\theta r\mathrm{d}\theta + \boldsymbol{e}_\varphi r\sin\theta\mathrm{d}\varphi \tag{1.3.20}$$

由此得在球面坐标系中任意空间曲线弧元的平方

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2 \tag{1.3.21}$$

*1.3.5 曲线坐标

在某些问题上,应用直角坐标会遇到许多不必要的麻烦,有时点在空间的位置不用直角坐标 x,y,z,而用另外三个量 q_1,q_2,q_3 来表达问题的条件时,会更为方便。于是,我们将空间中一点的位矢看作是三个独立实变量 q_1,q_2,q_3 的函数

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(q_1, q_2, q_3) \tag{1.3.22}$$

矢量 $\boldsymbol{r}$ 可以沿着直角坐标系的单位矢量分解,所以给定函数(1.3.22)意味着给定三个函数

$$x = x(q_1, q_2, q_3), \qquad y = y(q_1, q_2, q_3), \qquad z = z(q_1, q_2, q_3) \tag{1.3.23}$$

假设式(1.3.23)连续和可微,且当在一定区间(有限的或无限的)内给定独立实变量 q_i 时,在全部空间中是单值函数。因此,每一组的三个实数 q_1,q_2

和 q_3，按式（1.3.23）对应于空间的一个且只一个点，所以 q_1，q_2，q_3 称为**曲线坐标**。因为直角坐标 x_1，x_2，x_3 也认为是独立的，点的位矢可以由直角坐标完全确定，所以曲线坐标 q_1，q_2，q_3 是在同一点的直角坐标 x，y，z 的函数

$$q_1 = q_1(x,y,z), \qquad q_2 = q_2(x,y,z), \qquad q_3 = q_3(x,y,z) \tag{1.3.24}$$

同时也假定在 q_i 的上述变化区域内对所有的 x，y，z 是单值的。方程 $q_1(x,y,z) = c_1$，$q_2(x,y,z) = c_2$，$q_3(x,y,z) = c_3$、（其中 c_1，c_2，c_3 是常数）各确定函数 $q_1(x,y,z)$，$q_2(x,y,z)$，$q_3(x,y,z)$ 的等值面。给予 c_1，c_2，c_3 以不同的值，我们可以得到三簇曲面，这三簇曲面称为**坐标曲面**。我们假定在空间各点，每簇曲面都有一个曲面经过，这也就是前面所假定的 q_i 是 x，y，z 的单值函数的含义，这些曲线称为**坐标曲线**（见图 1.10）。在第二与第三簇曲面的交线上 q_2，q_3 的值不变，只有 q_1 变化。同样在第三与第一簇曲面的交线上 q_3 和 q_1 不变化，只有 q_2 变化。在第一簇与第二簇曲面的交线上 q_1 与 q_2 不变化，只有 q_3 变化。由此可见，在每一条坐标曲线上，点的直角坐标 x，y，z 只是 q_1，q_2，q_3 中一个变数的函数；而每一个坐标面只是含有 q_1，q_2，q_3 中的两个变数的函数。

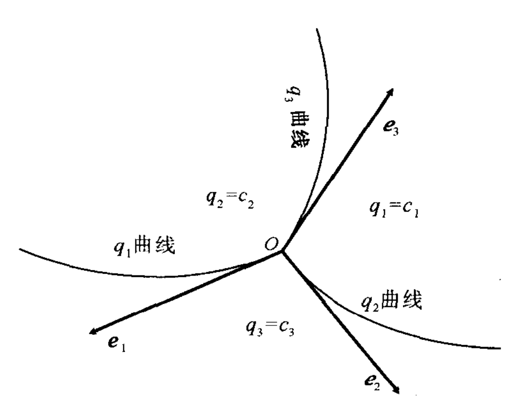


图 1.10 坐标曲面和坐标曲线

我们以后假设，在各点的坐标曲线互相正交，也就是说各坐标曲线在该点的切线两两垂直。在这种情形下，坐标面也互相正交。对于坐标曲线在空间的方位我们这样来确定，使得坐标曲线在各点的切线，以对应的曲线坐标 q 增加一方为正指向后，按照我们采用的坐标系，构成右手直角坐标系。这里我们用 $\boldsymbol{e}_x$，$\boldsymbol{e}_y$，$\boldsymbol{e}_z$，表示直角坐标系轴 x，y，z 方向的单位矢量，而用 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$，表示坐标曲线 q_1，q_2，q_3 切线的单位矢量。$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 是 q_1，q_2，q_3 的矢性函数，当沿着坐标曲线移动时，它们成为只是对应一个 q_i 的函数。

设 $\mathrm{d}s_1$，$\mathrm{d}s_2$，$\mathrm{d}s_3$，是对应坐标曲线的弧元的长，由于 $\mathrm{d}s = |\mathrm{d}\boldsymbol{r}|$（一如既往，$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z$ 是点的位矢），但在坐标曲线 q_1 上只有 q_1 变化，所以

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{\partial x}{\partial q_1}\mathrm{d}q_1\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial y}{\partial q_1}\mathrm{d}q_1\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial z}{\partial q_1}\mathrm{d}q_1\boldsymbol{e}_z \tag{1.3.25}$$

$$|\mathrm{d}\boldsymbol{r}| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2}\,\mathrm{d}q_1 \tag{1.3.26}$$

因此
$$ds_1 = h_1 dq_1 \tag{1.3.27a}$$
其中
$$h_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2} \tag{1.3.27b}$$
同理
$$ds_2 = h_2 dq_2 \tag{1.3.28a}$$
$$h_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)^2} \tag{1.3.28b}$$
以及
$$ds_3 = h_3 dq_3 \tag{1.3.29a}$$
$$h_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_3}\right)^2} \tag{1.3.29b}$$
h_1，h_2，h_3 称为**度规系数**（metric coefficients），是曲线坐标的函数。

我们也可以从另一个角度求 $d\boldsymbol{r}$。对矢量函数式（1.3.22）取全微分
$$d\boldsymbol{r} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_3}dq_3 \tag{1.3.30}$$
沿其中所出现的三个矢量的方向引入单位矢量
$$\boldsymbol{e}_1 \equiv \frac{1}{h_1}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_1}, \qquad \boldsymbol{e}_2 \equiv \frac{1}{h_2}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_2}, \qquad \boldsymbol{e}_3 \equiv \frac{1}{h_3}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_3} \tag{1.3.31}$$
可见 h_1，h_2，h_3 表示各矢量的模
$$h_1 \equiv \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_1}\right|, \qquad h_2 \equiv \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_2}\right|, \qquad h_3 \equiv \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_3}\right| \tag{1.3.32}$$
式（1.3.30）可以写成
$$d\boldsymbol{s} = d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{e}_1 h_1 dq_1 + \boldsymbol{e}_2 h_2 dq_2 + \boldsymbol{e}_3 h_2 dq_3 \tag{1.3.33}$$
对这一等式可以做如下的几何解释：它是任意元矢量 $d\boldsymbol{r}$ 沿三个非共面矢量的分解式，单位矢量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 的非共面性的事实可以表达为如下的论断：由它们作成的平行六面体的体积不等于零
$$(\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2)\cdot \boldsymbol{e}_3 \neq 0 \tag{1.3.34}$$
事实上，若设这一体积等于零，则式（1.3.34）将是按式（1.3.31）联系着函数 x，y，z 的微分方程，即它们之间存在依赖关系，这是不允许的。

由式（1.3.33）可得弧元的平方
$$ds^2 = h_1^2 dq_1^2 + h_2^2 dq_2^2 + h_3^2 dq_3^2 \tag{1.3.35}$$

作为例子，我们用曲线坐标的公式来求平面极坐标系、柱面坐标系和球面坐标系中空间曲线弧长的平方。

1）在平面极坐标系中

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta, \qquad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta$$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta, \qquad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta$$

度规系数

$$h_r = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2} = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$$

$$h_\theta = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2} = \sqrt{(-r\sin\theta)^2 + (r\cos\theta)^2} = r$$

所以

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}r\boldsymbol{e}_r + r\mathrm{d}\theta\boldsymbol{e}_\theta$$

由此得

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2$$

2）在柱面坐标系中，显然 h_ρ，h_φ 与极坐标系中相同，即

$$h_\rho = 1$$

$$h_\varphi = \rho$$

而 z 在直角坐标系和柱面坐标系中二者相同，所以

$$h_z = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2} = 1$$

于是有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}\rho\boldsymbol{e}_\rho + \rho\mathrm{d}_\varphi\boldsymbol{e}_\rho + \mathrm{d}z\boldsymbol{e}_z$$

由此得

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\rho^2 + \rho^2\mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}z^2$$

3）球面坐标系中

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi, \qquad z = r\cos\theta$$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \sin\theta\cos\varphi, \qquad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta\sin\varphi, \qquad \frac{\partial z}{\partial r} = \cos\theta$$

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r\sin\theta\sin\varphi, \qquad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = r\sin\theta\cos\varphi, \qquad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = r\cos\theta\cos\varphi, \qquad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta\sin\varphi, \qquad \frac{\partial z}{\partial \theta} = -r\sin\theta$$

度规系数

$$h_r = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\sin^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\theta\sin^2\varphi + \cos^2\theta} = 1$$

$$h_\rho = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2}$$

$$= \sqrt{r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi} = r\sin\theta$$

$$h_\theta = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2}$$

$$= \sqrt{r^2\cos^2\theta\cos^2\varphi + r^2\cos^2\theta\sin^2\varphi + r^2\sin^2\theta} = r$$

所以

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}r\boldsymbol{e}_r + r\mathrm{d}\theta\boldsymbol{e}_\theta + r\sin\theta\mathrm{d}\varphi\boldsymbol{e}_\varphi$$

由此得

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2$$

1.4 速度和加速度的分解

1.4.1 直角坐标系法

在直角坐标系中位矢 $\boldsymbol{r}(t)$ 的分量形式为

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z \tag{1.4.1}$$

根据式（1.2.3），质点的速度 $\boldsymbol{v}$ 为

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_x + x\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_x}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_y + y\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_y}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_z + z\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_z}{\mathrm{d}t} \tag{1.4.2}$$

因为直角坐标系中，单位矢量 $\boldsymbol{e}_x$，$\boldsymbol{e}_y$，$\boldsymbol{e}_z$ 是固定的，因而它们对于时间 t 的微商恒为零，即

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_z}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{1.4.3}$$

这是直角坐标系与其他坐标系的主要区别。由式（1.4.3），式（1.4.2）变为

$$\boldsymbol{v} = \dot{x}\boldsymbol{e}_x + \dot{y}\boldsymbol{e}_y + \dot{z}\boldsymbol{e}_z \tag{1.4.4}$$

另一方面，在直角坐标系中，速度 $\boldsymbol{v}(t)$ 的分量表达式为

$$\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{e}_x + v_y\boldsymbol{e}_y + v_z\boldsymbol{e}_z \tag{1.4.5}$$

比较 $\boldsymbol{v}$ 的两种表达式，最后求得

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} \tag{1.4.6a}$$

分量表达式为

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\dot{x},\qquad v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\dot{y},\qquad v_z=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\dot{z} \tag{1.4.6b}$$

就是说，速度在直角坐标轴上的投影，等于动点的相应坐标对时间 t 的一级微商。若令 v 及 α，β，γ 分别表示速度矢量的大小及方向角，则得

$$\left.\begin{aligned}&v\equiv|\boldsymbol{v}|=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\\&\cos\alpha=\frac{v_x}{v},\qquad\cos\beta=\frac{v_y}{v},\qquad\cos\gamma=\frac{v_z}{v}\end{aligned}\right\} \tag{1.4.7}$$

下面来求质点的加速度。仿照上面确定质点速度的方法，一方面将加速度矢量表示为

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{e}_x+a_y\boldsymbol{e}_y+a_z\boldsymbol{e}_z \tag{1.4.8}$$

另一方面，根据式（1.2.4），将式（1.4.4）对 t 求微商，并且由基本条件式（1.4.3），最后可求得加速度

$$\boldsymbol{a}=\dot{\boldsymbol{v}}=\ddot{\boldsymbol{r}} \tag{1.4.9}$$

分量表达式为

$$\left.\begin{aligned}a_x&=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=\ddot{x}\\a_y&=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=\ddot{y}\\a_z&=\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}=\ddot{z}\end{aligned}\right\} \tag{1.4.10}$$

就是说，加速度在直角坐标的投影等于速度投影对 t 的一级微商，或者等于相应坐标对 t 的二级微商。加速度矢量 $\boldsymbol{a}$ 的大小及方向余弦为

$$\left.\begin{aligned}&a\equiv|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2}\\&\cos(\boldsymbol{a},x)=\frac{a_x}{a},\qquad\cos(\boldsymbol{a},y)=\frac{a_y}{a},\qquad\cos(\boldsymbol{a},z)=\frac{a_z}{a}\end{aligned}\right\} \tag{1.4.11}$$

式中以（$\boldsymbol{a}$，x）表示 $\boldsymbol{a}$ 和 x 轴间的夹角，余者类推。

1.4.2　柱面坐标系法

在柱面坐标系中，单位矢量 $\boldsymbol{e}_z$ 仍为常量，但 $\boldsymbol{e}_\rho$ 和 $\boldsymbol{e}_\varphi$ 则不再是常量了。位矢 $\boldsymbol{r}$ 在柱面坐标系中的分解根据式（1.3.8）得

$$\boldsymbol{r}=\rho\,\boldsymbol{e}_\rho+z\boldsymbol{e}_z \tag{1.4.12}$$

对上式求微分得

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{e}_\rho\mathrm{d}\rho+\rho\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\rho+\boldsymbol{e}_z\mathrm{d}z \tag{1.4.13}$$

由图 1.6 可以直接看出，单位矢量 $\boldsymbol{e}_\rho$ 和 $\boldsymbol{e}_\varphi$ 沿射线 ρ 是不变的，而只沿坐标线 φ

变动（只在方向上变动，它们的模等于 1），因为它们仅依赖于坐标 φ。单位矢量 $\boldsymbol{e}_\rho$，$\boldsymbol{e}_\varphi$ 是标变量 φ 的连续矢量函数

$$\boldsymbol{e}_\rho=\boldsymbol{e}_\rho(\varphi),\qquad \boldsymbol{e}_\varphi=\boldsymbol{e}_\varphi(\varphi) \tag{1.4.14}$$

它们的微商等于

$$\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\rho=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\rho}{\mathrm{d}\varphi}\mathrm{d}\varphi,\qquad \mathrm{d}\boldsymbol{e}_\varphi=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\varphi}{\mathrm{d}\varphi}\mathrm{d}\varphi \tag{1.4.15}$$

现在再来计算这些单位矢量对角度 φ 的微商。由图 1.11（a）可见

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\rho}{\mathrm{d}\varphi}=\lim_{\Delta\varphi\to0}\frac{\Delta\boldsymbol{e}_\rho}{\Delta\varphi}=\lim_{\Delta\varphi\to0}\frac{|\Delta\boldsymbol{e}_\rho|\boldsymbol{e}_\rho}{\Delta\varphi}$$

因为 $|\Delta\boldsymbol{e}_\rho|=\Delta\varphi$，这是由于矢量 $\Delta\boldsymbol{e}_\rho$ 的模是单位半径的圆（单位圆）上中心角为 $\Delta\varphi$ 的弧所张的弦，在略去高级小量的情况下可认为它和对应的中心角相等。所以上式为

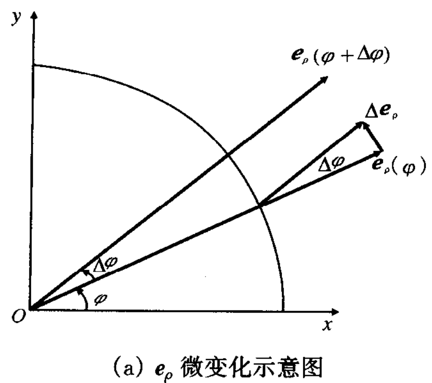
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\rho}{\mathrm{d}\varphi}=\boldsymbol{e}_\varphi \tag{1.4.16a}$$

或者

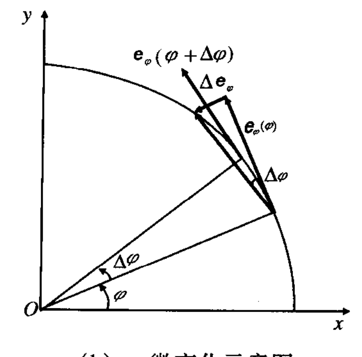
$$\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\rho=\boldsymbol{e}_\varphi\mathrm{d}\varphi \tag{1.4.16b}$$

同样，由图 1.11（b）可知

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\varphi}{\mathrm{d}\varphi}=\lim_{\Delta\varphi\to0}\frac{\Delta\boldsymbol{e}_\varphi}{\Delta\varphi}=\lim_{\Delta\varphi\to0}\frac{|\Delta\boldsymbol{e}_\varphi|\ (-\boldsymbol{e}_\rho)}{\Delta\varphi}$$



(a) $\boldsymbol{e}_\rho$ 微变化示意图



(b) $\boldsymbol{e}_\varphi$ 微变化示意图

图 1.11

注意到 $|\Delta\boldsymbol{e}_\varphi|=\Delta\varphi$,即可得到

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\varphi}{\mathrm{d}\varphi}=-\boldsymbol{e}_\rho \tag{1.4.17a}$$

或者

$$\mathrm{d}\boldsymbol{e}_{\varphi} = -\boldsymbol{e}_{\rho}\mathrm{d}\varphi \tag{1.4.17b}$$

把式（1.4.16b）代入式（1.4.13）得

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}\rho\,\boldsymbol{e}_{\rho} + \rho\mathrm{d}\varphi\,\boldsymbol{e}_{\varphi} + \mathrm{d}z\,\boldsymbol{e}_{z} \tag{1.4.18}$$

这个结果与式（1.3.9）是一致的，只不过那里是用的较为直观的方法，而这里用了矢量函数对标量求微商这种更为普遍的方法。

下面来求质点在柱面坐标中的速度。根据式（1.2.3），质点的速度为

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\rho}\,\boldsymbol{e}_{\rho} + \rho\dot{\varphi}\,\boldsymbol{e}_{\varphi} + \dot{z}\,\boldsymbol{e}_{z} \tag{1.4.19a}$$

将速度 $\boldsymbol{v}$ 沿柱面坐标系的单位矢量分解

$$\boldsymbol{v} = v_{\rho}\boldsymbol{e}_{\rho} + v_{\varphi}\boldsymbol{e}_{\varphi} + v_{z}\boldsymbol{e}_{z} \tag{1.4.19b}$$

将上式比较可得柱面坐标系速度的分量形式

$$v_{\rho} = \dot{\rho}, \qquad v_{\varphi} = \rho\dot{\varphi}, \qquad v_{z} = \dot{z} \tag{1.4.19c}$$

现在来求质点在柱面坐标中的加速度。对式（1.4.19b）求微分

$$\mathrm{d}\boldsymbol{v} = \mathrm{d}v_{\rho}\cdot\boldsymbol{e}_{\rho} + v_{\rho}\mathrm{d}\boldsymbol{e}_{\rho} + \mathrm{d}v_{\varphi}\cdot\boldsymbol{e}_{\varphi} + v_{\varphi}\mathrm{d}\boldsymbol{e}_{\varphi} + \mathrm{d}v_{z}\cdot\boldsymbol{e}_{z} \tag{1.4.20}$$

利用式（1.4.16b）和（1.4.17b）可将上式写成如下形式

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{v} &= \mathrm{d}v_{\rho}\cdot\boldsymbol{e}_{\rho} + v_{\rho}\mathrm{d}\varphi\cdot\boldsymbol{e}_{\varphi} + \mathrm{d}v_{\varphi}\cdot\boldsymbol{e}_{\varphi} - v_{\varphi}\mathrm{d}\varphi\cdot\boldsymbol{e}_{\rho} + \mathrm{d}v_{z}\cdot\boldsymbol{e}_{z}\\ &= (\mathrm{d}v_{\rho} - v_{\varphi}\mathrm{d}\varphi)\boldsymbol{e}_{\rho} + (\mathrm{d}v_{\varphi} + v_{\rho}\mathrm{d}\varphi)\boldsymbol{e}_{\varphi} + \mathrm{d}v_{z}\cdot\boldsymbol{e}_{z}\end{aligned} \tag{1.4.21}$$

将式（1.4.21）代入加速度的定义式（1.2.4）得

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = (\dot{v}_{\rho} - v_{\varphi}\dot{\varphi})\boldsymbol{e}_{\rho} + (\dot{v}_{\varphi} + v_{\rho}\dot{\varphi})\boldsymbol{e}_{\rho} + \dot{v}_{z}\boldsymbol{e}_{z} \tag{1.4.22}$$

将加速度 $\boldsymbol{a}$ 沿柱面坐标系的单位矢量分解

$$\boldsymbol{a} = a_{\rho}\boldsymbol{e}_{\rho} + a_{\varphi}\boldsymbol{e}_{\varphi} + a_{z}\boldsymbol{e}_{z} \tag{1.4.23}$$

将式（1.4.23）和（1.4.22）比较可得柱面坐标系加速度的分量形式

$$\left.\begin{aligned}a_{\rho} &= \dot{v}_{\rho} - v_{\varphi}\dot{\varphi} = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^{2}\\ a_{\varphi} &= \dot{v}_{\varphi} + v_{\rho}\dot{\varphi} = \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi} = \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho^{2}\dot{\varphi})\\ a_{z} &= \dot{v}_{z} = \ddot{z}\end{aligned}\right\} \tag{1.4.24}$$

式（1.4.24）的第二式 $a_{\varphi} = \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho^{2}\dot{\varphi})$ 的形式在需要进行积分运算时较方便。

1.4.3 平面极坐标系法

这是二维坐标系，只适于平面运动。只需令柱面坐标系中的 $z=0$，并将符号作变换 $\rho\to r$，$\varphi\to\theta$，即可得在平面极坐标系中

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}r\boldsymbol{e}_{r} + r\mathrm{d}\theta\boldsymbol{e}_{\theta} \tag{1.4.25}$$

质点的速度

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\dot{r}\boldsymbol{e}_r+r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta \tag{1.4.26a}$$

速度 $\boldsymbol{v}$ 沿平面极坐标系的单位矢量分解

$$\boldsymbol{v}=v_r\boldsymbol{e}_r+v_\theta\boldsymbol{e}_\theta \tag{1.4.26b}$$

v_r 和 v_θ 分别称为速度的**径向分量**和**横向分量**。速度在平面极坐标系中的分量形式

$$v_r=\dot{r},\qquad v_\theta=r\dot{\theta} \tag{1.4.26c}$$

$\dot{\theta}$是动点在平面中运动时其位矢在单位时间内转过的角度，称为动点绕极点 O 的角速度。

质点的加速度

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=(\dot{v}_r-v_\theta\dot{\theta})\boldsymbol{e}_r+(\dot{v}_\theta+v_r\dot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta \tag{1.4.27a}$$

加速度沿平面极坐标系的单位矢量分解

$$\boldsymbol{a}=a_r\boldsymbol{e}_r+a_\theta\boldsymbol{e}_\theta \tag{1.4.27b}$$

加速度在平面坐标系中的分量形式

$$\left.\begin{aligned}a_r&=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\\ a_\theta&=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\theta})\end{aligned}\right\} \tag{1.4.27c}$$

1.4.4 面积速度

这里我们要插述质点力学中一个非常重要的概念即所谓**面积速度**，或者称为**扇形速度**。至于它为什么会有这样的名称，将在下文中解释。首先，我们用下面的定义来引入它

$$\boldsymbol{\sigma}=\frac{1}{2}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v} \tag{1.4.28}$$

$\boldsymbol{\sigma}$ 的大小（模）等于

$$\sigma=\frac{1}{2}rv\sin(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v}) \tag{1.4.29}$$

即面积速度的大小等于由矢量 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 作的平行四边形的面积之半。把速度的定义 $\boldsymbol{v}=\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t$代入上式，可将面积速度写成微商形式

$$\boldsymbol{\sigma}=\frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{r}\times\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{s}}{\mathrm{d}t} \tag{1.4.30}$$

其中

$$\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\frac{1}{2}\boldsymbol{r}\times\mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{1.4.31}$$

由于两个矢量的叉乘积的量值等于由这两个矢量作的平行四边形的面积，所以在注意到定义式（1.4.31）中的因子1/2后，我们发现，模$|\mathrm{d}\boldsymbol{s}|$等于位矢 $\boldsymbol{r}$ 在质点

的元位移为 d$\boldsymbol{r}$ 时所扫过的扇形面积（图 1.12 画有影线的面积）。由此可见，面积速度的意义是单位时间内位矢所扫过的扇形面积，所以才有面积速度或扇形速度这种非常形象的名称。面积速度 $\boldsymbol{\sigma}$ 的单位是 $\mathrm{m^2/s}$。

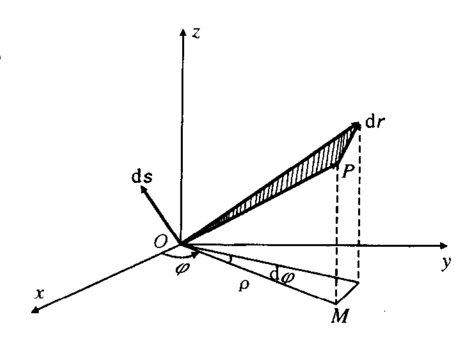


图 1.12 面积速度示意图

按照定义式（1.4.28），沿直角坐标轴的面积速度分量形式为

$$\boldsymbol{\sigma}=\frac{1}{2}(x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+z\boldsymbol{e}_z)\times(\dot{x}\boldsymbol{e}_x+\dot{y}\boldsymbol{e}_y+\dot{z}\boldsymbol{e}_z)$$

将其展开，注意到单位矢量间的正交关系，即可得到

$$\boldsymbol{\sigma}=\frac{1}{2}[(y\dot{z}-z\dot{y})\boldsymbol{e}_z+(z\dot{x}-x\dot{z})\boldsymbol{e}_y+(x\dot{y}-y\dot{x})\boldsymbol{e}_z] \tag{1.4.32a}$$

或者

$$2\sigma_z=y\dot{z}-z\dot{y},\qquad 2\sigma_y=z\dot{x}-x\dot{z},\qquad 2\sigma_z=x\dot{y}-y\dot{x} \tag{1.4.32b}$$

类似地，可以求出面积速度 $\boldsymbol{\sigma}$ 沿柱面坐标轴的分量形式

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}&=\frac{1}{2}\ (\rho\,\boldsymbol{e}_\rho+z\boldsymbol{e}_z)\ \times\ (v_\rho\boldsymbol{e}_\rho+v_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi+v_z\boldsymbol{e}_z)\\&=\frac{1}{2}[(-zv_\varphi)\boldsymbol{e}_\rho+(zv_\rho-\rho v_z)\boldsymbol{e}_\varphi+(\rho v_\varphi)\boldsymbol{e}_z]\end{aligned} \tag{1.4.33a}$$

或者

$$\left.\begin{aligned}2\sigma_\rho&=-zv_\varphi=-z\rho\dot{\varphi}\\2\sigma_\varphi&=zv_\rho-\rho v_z=z\dot{\rho}-\rho\dot{z}\\2\sigma_z&=\rho v_\varphi=\rho^2\dot{\varphi}\end{aligned}\right\} \tag{1.4.33b}$$

注意：上式中的第三个等式，即

$$\sigma_z=\frac{1}{2}\rho^2\dot{\varphi} \tag{1.4.34}$$

可由图 1.12 直接看出，因为矢量 d$\boldsymbol{s}$ 在轴 z 上的投影等于扇形面积 d$\boldsymbol{s}$ 在平面 xy 上的投影，即 $\frac{1}{2}\rho\cdot\rho\mathrm{d}\varphi$。

现在我们再来审视式（1.4.24）中的第二式，即

$$a_\varphi=\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho^2\dot{\varphi}) \tag{1.4.35}$$

可见 a_φ 表达式中的量 $\rho^2\dot{\varphi}$ 具有明显的几何意义：它是动点对原点 O 的面积速度的 2 倍。不言而喻，式（1.4.27c）的第二式中的量 $r^2\dot{\theta}$ 也有同样的几何意义。

1.4.5 球面坐标系法

球面坐标系又称球面极坐标系。设动点 P 的球面坐标是（r，θ，φ），如图 1.8 所示。在球面坐标系中通常称 r 为极径，θ 为**极角或余纬度角**，φ 为**方位角或经度角**。像往常一样，以单位矢量 $\boldsymbol{e}_r$，$\boldsymbol{e}_\theta$，$\boldsymbol{e}_\varphi$ 分别表示沿 r，θ 和 φ 坐标曲线上指向坐标增加方向的切线矢量。因为

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi, \qquad z = z\cos\theta \tag{1.4.36a}$$

所以

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z = r\sin\theta\cos\varphi\boldsymbol{e}_x + r\sin\theta\sin\varphi\boldsymbol{e}_y + r\cos\theta\boldsymbol{e}_z \tag{1.4.36b}$$

而沿 $\boldsymbol{r}$ 方向的单位矢量

$$\boldsymbol{e}_r = \frac{\boldsymbol{r}}{r} = \sin\theta\cos\varphi\boldsymbol{e}_x + \sin\theta\cos\varphi\boldsymbol{e}_y + \cos\theta\boldsymbol{e}_z \tag{1.4.37a}$$

如改变 $\boldsymbol{e}_r$ 与轴 z 间的夹角 θ 为 $\frac{\pi}{2}+\theta$，则得

$$\boldsymbol{e}_\theta = (\boldsymbol{e}_r)_{\theta\to\frac{\pi}{2}+\theta} = \cos\theta\cos\varphi\boldsymbol{e}_x + \cos\theta\sin\varphi\boldsymbol{e}_y - \sin\theta\boldsymbol{e}_z \tag{1.4.37b}$$

因为 $\boldsymbol{e}_r$，$\boldsymbol{e}_\theta$，$\boldsymbol{e}_\varphi$ 构成一个右手正交坐标系，故

$$\boldsymbol{e}_\varphi = \boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{e}_\theta = -\sin\varphi\boldsymbol{e}_x + \cos\varphi\boldsymbol{e}_y \tag{1.4.37c}$$

从式（1.4.37）可以看出，单位矢量 $\boldsymbol{e}_r$ 和 $\boldsymbol{e}_\theta$ 都是 θ 及 φ 的函数，而 $\boldsymbol{e}_\varphi$ 则只是 φ 的函数，即

$$\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{e}_r(\theta,\varphi), \qquad \boldsymbol{e}_\theta = \boldsymbol{e}_\theta(\theta,\varphi), \qquad \boldsymbol{e}_\varphi = \boldsymbol{e}_\varphi(\varphi) \tag{1.4.38}$$

所以

$$\dot{\boldsymbol{e}}_r = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}\,\boldsymbol{e}_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta\boldsymbol{e}_\varphi \tag{1.4.39a}$$

$$\dot{\boldsymbol{e}}_\theta = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}\,\boldsymbol{e}_r + \dot{\varphi}\cos\boldsymbol{e}_\varphi \tag{1.4.39b}$$

$$\dot{\boldsymbol{e}}_\varphi = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{e}_\varphi}{\partial\theta}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = -\dot{\varphi}\sin\theta\boldsymbol{e}_r - \dot{\varphi}\cos\theta\boldsymbol{e}_\varphi \tag{1.4.39c}$$

有了上面的准备工作，现在我们来求球面坐标系中的速度和加速度。质点在空间的位矢可表为

$$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r \tag{1.4.40}$$

所以

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_r + r\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}t} \tag{1.4.41}$$

将式（1.4.39a）的 $\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r/\mathrm{d}t$ 代入上式立即可得

$$\boldsymbol{v}_r = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\,\dot{\theta}\,\boldsymbol{e}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\boldsymbol{e}_\varphi \tag{1.4.42a}$$

故速度的分量形式为

$$v_r=\dot{r},\qquad v_\theta=r\dot{\theta},\qquad v_\varphi=r\dot{\varphi}\sin\theta \tag{1.4.42b}$$

现在来求球面坐标系中的加速度，对式（1.4.42a）求时间 t 的微商

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\ddot{r}\boldsymbol{e}_r+\dot{r}\dot{\boldsymbol{e}}_r+\dot{r}\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta+r\ddot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta+r\dot{\theta}\dot{\boldsymbol{e}}_\theta+\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta\boldsymbol{e}_\varphi+r\ddot{\varphi}\sin\theta\boldsymbol{e}_\varphi+r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\boldsymbol{e}_\varphi+r\dot{\varphi}\sin\theta\dot{\boldsymbol{e}}_\varphi \tag{1.4.43}$$

把式（1.4.39）中的 $\dot{\boldsymbol{e}}_r$，$\dot{\boldsymbol{e}}_\theta$，$\dot{\boldsymbol{e}}_\varphi$ 代入式（1.4.43）得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2-r\dot{\varphi}^2\sin\theta)\boldsymbol{e}_r+(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}-r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta)\boldsymbol{e}_\theta\\&\quad+(r\ddot{\varphi}\sin\theta+2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta+2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta)\boldsymbol{e}_\varphi\end{aligned} \tag{1.4.44 a}$$

由此知在球面坐标中加速度 $\boldsymbol{a}$ 沿 $\boldsymbol{e}_r$，$\boldsymbol{e}_\theta$，$\boldsymbol{e}_\varphi$ 三个方向的分量是

$$\left.\begin{aligned}a_r&=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2-r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\\a_\theta&=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}-r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\\a_\varphi&=r\ddot{\varphi}\sin\theta+2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta+2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\end{aligned}\right\} \tag{1.4.44b}$$

或者

$$\left.\begin{aligned}a_r&=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2-r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\\a_\theta&=\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\theta})-r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\\a_\varphi&=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\varphi}\sin^2\theta)\end{aligned}\right\} \tag{1.4.44c}$$

1.4.6 曲线坐标法

根据式（1.3.33），对于某一所考察的点在空间的位移可以写成

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{e}_1h_1\mathrm{d}q_1+\boldsymbol{e}_2h_2\mathrm{d}q_2+\boldsymbol{e}_3h_3\mathrm{d}q_3 \tag{1.4.45}$$

将上式对 t 求微商可得点的速度

$$\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{e}_1h_1\dot{q}_1+\boldsymbol{e}_2h_2\dot{q}_2+\boldsymbol{e}_3h_3\dot{q}_3 \tag{1.4.46}$$

当曲线坐标是正交坐标时，可以证明

$$v^2=h_1^2\dot{q}_1^2+h_2^2\dot{q}_2^2+h_3^2\dot{q}_3^2 \tag{1.4.47}$$

加速度正交投影的最终形式为

$$a_i=\frac{1}{h_i}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial\mathrm{d}\dot{q}}\left(\frac{v^2}{2}\right)-\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{v^2}{2}\right)\right\}\qquad(i=1,2,3) \tag{1.4.48}$$

因为推导过程比较繁琐，此处从略。作为一个例子，我们用式（1.4.48）来求球面坐标系中的加速度公式。

由式（1.4.42a）立即可知，在球面坐标中

$$v^2=\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 \tag{1.4.49}$$

又由 1.3 节求得的结果知柱面坐标的度规系数为

$$h_r=1,\qquad h_\theta=1,\qquad h_\varphi=r\sin\theta$$

将上述这些结果代入式（1.4.48）得

$$\begin{aligned}
a_r&=\frac{1}{h_r}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial\dot{r}}\left(\frac{v^2}{2}\right)-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v^2}{2}\right)\right]\\
&=\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta-r\dot{\theta}^2\\
a_\theta&=\frac{1}{h_\theta}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial\dot{\theta}}\left(\frac{v^2}{2}\right)-\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{v^2}{2}\right)\right]\\
&=\frac{1}{r}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\dot{\theta}\right)-r^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\right]\\
a_\varphi&=\frac{1}{h_\varphi}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial\dot{\varphi}}\left(\frac{v^2}{2}\right)-\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{v^2}{2}\right)\right]\\
&=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\dot{\varphi}\sin^2\theta\right)
\end{aligned}$$

仿此，请读者自求柱面坐标系中加速度的公式。

1.4.7 自然坐标法

除了前面所述的那些用特殊的曲线定义的坐标系之外，微分几何中还有一种利用轨道曲线自身的参数来定义坐标系的方法。这就是下面要介绍的自然坐标系。

自然坐标系也叫**本性坐标系**或**内禀坐标系**。从这个坐标系的名称上也许马上会联想到它是描述运动的一种非常重要的方法。事实上，也确实如此。

1. 自然坐标系

设某一所考察的点在空间移动，其位置由位矢 $\boldsymbol{r}$ 确定，我们现在来确定位矢 $\boldsymbol{r}$ 与时间 t 的依赖关系

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t) \tag{1.4.50}$$

我们假设矢量函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 是连续的。

若以某时刻 t_0 开始计时，则在 $t\geqslant t_0$ 的时间进程中，质点位置的连续序列构成质点的轨道。实际上，它就是位矢 $\boldsymbol{r}$ 的矢端曲线。通常人们用 s 表示轨道的弧长，它从相应于时刻 $t=t_0$ 的起点沿质点的运动方向来计算，朝着运动的方向称为**正向**，逆着运动方向称为**负向**。于是函数 s 与曲线上点的位置一一对应，所以称 s 为曲线上 P 点的**弧坐标**。

质点在运动时，位矢 $\boldsymbol{r}$ 可以看作是弧坐标的函数。质点的运动由两个函数描写，其中一个是矢量函数，一个是标量函数

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s) \tag{1.4.51}$$

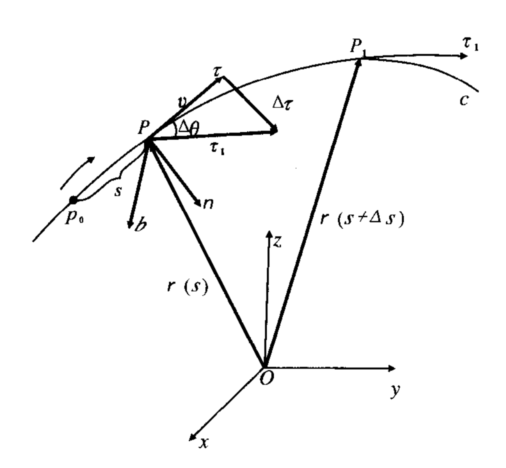
和

$$s=s(t) \tag{1.4.52}$$

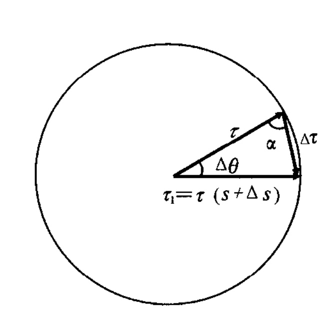
因为 s 恒是 t 的单调增（正）函数，相应于每一时刻 t 只有一个确定的值 s，所以 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 和 $s=s(t)$ 在全部时间中都是单值的。当轨道上存在转向点和轨道封闭的情形下也是如此，因为 s 始终是沿质点的运动方向来计算的。

如图 1.13（a）所示，我们用 $\boldsymbol{\tau}$ 表示曲线在 P 点切线的单位矢量，其指向与弧坐标正方向一致（弧长增加的一方）。用 $\boldsymbol{\tau}_1$ 表示邻近点 P_1 的切线方向单位矢量，当然，其指向也是指向弧坐标的正向。将 $\boldsymbol{\tau}_1$ 平移到 P 点时，$\boldsymbol{\tau}$ 和 $\boldsymbol{\tau}_1$ 确定一个平面，它们间的夹角为 $\Delta\theta$，当 $\Delta s\to 0$ 时，即 P_1 点趋近于 P 点时，$\boldsymbol{\tau}$ 和 $\boldsymbol{\tau}_1$ 所确定的平面趋向于一个极限位置，叫曲线 c 在 P 点的密切平面，矢量差

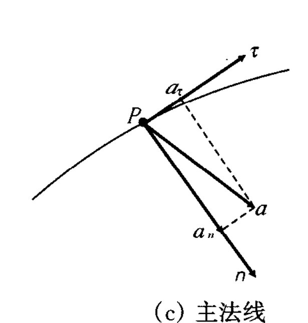
$$\Delta\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{\tau}_1-\boldsymbol{\tau}$$



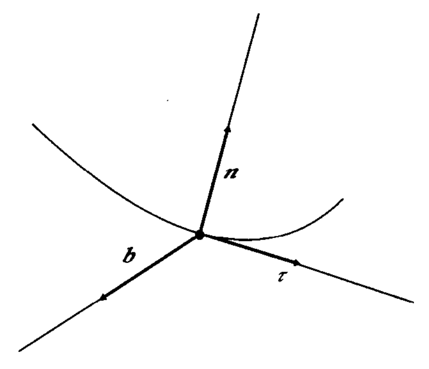
(a) 由 $\boldsymbol{\tau}$ 和 $\boldsymbol{\tau}_1$ 确定一个密切平面



(b) 在极限情况下 $\Delta\boldsymbol{\tau}\perp\boldsymbol{\tau}$



(c) 主法线



(d) 自然坐标系

图 1.13

就落在这个密切平面上，而其极限垂直于 $\boldsymbol{\tau}$。从图 1.13（b）很直观地可以看出，当 $\Delta s \to 0$ 时，$\Delta\theta \to 0$，从而

$$\alpha = \frac{1}{2}\ (\pi - \Delta\theta)\ \to \frac{\pi}{2}$$

我们在 P 点的密切平面上取一单位矢量 $\boldsymbol{n}$，令其代表 $\Delta\boldsymbol{\tau}$ 的极限方向，且指向曲线凹的一方。$\boldsymbol{n}$ 称为**主法线**的单位矢量。再定义一个单位矢量 $\boldsymbol{b}$，使得

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{n} \tag{1.4.53}$$

$\boldsymbol{b}$ 称为**副法线**（**仲法线**或**次法线**）的单位矢量。于是，$\boldsymbol{\tau}$，$\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 确定了一个在 P 点的正交坐标基。由它们所确定的坐标系，称为**自然坐标系**。由于动点位置不断改变，轨道的切线、法线和副法线的方位也在不断变化，因而轨道上各点的自然轴的方位是处处不同的。

2. 质点的速度

质点的速度是其位矢 $\boldsymbol{r}$ 对时间 t 的微商

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\boldsymbol{r}} \tag{1.4.54}$$

矢量的微商沿矢量的矢端曲线的切线方向，即速度 $\boldsymbol{v}$ 沿质点轨道的切线方向，朝向质点运动的方向。质点位矢的微分为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}x\boldsymbol{e}_x + \mathrm{d}y\boldsymbol{e}_y + \mathrm{d}z\boldsymbol{e}_z \tag{1.4.55}$$

而它的模等于

$$|\mathrm{d}\boldsymbol{r}| = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2} \tag{1.4.56}$$

另一方面，大家知道弧长的微分 $\mathrm{d}s$ 由下式确定

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2} \tag{1.4.57}$$

因此

$$|\mathrm{d}\boldsymbol{r}| = \mathrm{d}s \tag{1.4.58}$$

也就是轨道的弧元 $\mathrm{d}s$ 等于矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 的模，即和它所张的弧一样。不过读者要注意，这里轨道弧元 $\mathrm{d}s$ 等于矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 的模，是在二级无限小的准确度内。沿切线朝质点运动方向作矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$，也是在二级无限小的准确度内

$$\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{1.4.59}$$

所以在极限情况下又得速度的下述表达式

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{s}}{\mathrm{d}t} \tag{1.4.60}$$

提请读者特别注意，有限弧长 s 不能用矢量表示，只有对无限小的弧 $\mathrm{d}s$ 才可以这样做。按照惯例，我们用 $\boldsymbol{\tau}$ 表示沿曲线的切线方向的单位矢量，则 $\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \mathrm{d}s \cdot \boldsymbol{\tau}$，而式（1.4.60）取如下形式

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau} \tag{1.4.61}$$

由此可见，速度的模 v 等于

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\dot{s} \tag{1.4.62}$$

即质点速度的量值等于其弧坐标对时间的一阶微商。

式（1.4.61）也可以由速度的定义直接导出

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

但是

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{s}}{\mathrm{d}s}=\boldsymbol{\tau} \tag{1.4.63}$$

故有

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}=v\boldsymbol{\tau} \tag{1.4.64}$$

可见，在自然坐标系中，质点的速度方向总是在切线方向上，或者说，在自然坐标系中，速度只有切线方向一个分量，速度在主法线和副法线方向上的分量恒为零。

3. 质点的加速度

将质点的速度表达式（1.4.64）代入加速度的定义式（1.2.4）得

$$\boldsymbol{a}=\dot{v}\boldsymbol{\tau}+v\frac{\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{\tau}}}{\mathrm{d}t} \tag{1.4.65}$$

把单位矢量 $\boldsymbol{\tau}$ 看作是弧坐标 s 的函数，则有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}s} \tag{1.4.66}$$

将式（1.4.66）代入式（1.4.65）得

$$\boldsymbol{a}=\dot{v}\boldsymbol{\tau}+v^2\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}s} \tag{1.4.67}$$

式（1.4.67）右方的第一项是沿轨道切线方向的矢量。加速度在切线方向的投影，称为**切向加速度**。用 a_τ 表示

$$\boldsymbol{a}_\tau=\dot{\boldsymbol{v}}=\ddot{s} \tag{1.4.68}$$

即切线加速度等于速度的大小对时间的一阶微商，或者等于弧长对时间的二阶微商。

为了解释式（1.4.67）第二项的含义，我们来说明微商

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}s} \tag{1.4.69}$$

的几何意义。若将等式

$$\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\tau}=1$$

两边对 s 取微商，得

$$\boldsymbol{\tau}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}s}=0$$

即矢量式（1.4.69）与矢量 $\boldsymbol{\tau}$ 垂直。用 $\boldsymbol{n}$ 表示沿矢量式（1.4.69）方向的单位矢量。$\boldsymbol{n}$ 的方向称为曲线上弧坐标为 s 点处的**主法线**方向：$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}(s)$。于是

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}s}=\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}s}\right|\boldsymbol{n} \tag{1.4.70}$$

由于

$$\left|\frac{\Delta\boldsymbol{\tau}}{\Delta s}\right|=\left|\frac{\Delta\boldsymbol{\tau}}{\Delta\theta}\right|\cdot\left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right|$$

注意到 $|\Delta\boldsymbol{\tau}|\approx|\boldsymbol{\tau}|\cdot|\Delta\theta|=1\cdot|\Delta\theta|=|\Delta\theta|$，当 $\Delta s\to0$ 时，上式两边取极限得

$$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}s}\right|=\left|\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\right| \tag{1.4.71}$$

矢量式（1.4.69）的模具有 m^{-1}的量纲，按照微分几何，引入特征长度 ρ

$$\frac{1}{\rho}=\left|\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\right|=\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}s}\right| \tag{1.4.72}$$

把式（1.4.70）写成下述形式

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}s}=\frac{\boldsymbol{n}}{\rho} \tag{1.4.73}$$

特征长度 ρ 称为曲线在 P 点的**曲率半径**：$\rho=\rho(s)$。而曲率半径的倒数

$$\frac{1}{\rho}=k=\left|\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\right| \tag{1.4.74}$$

k 就是曲线在 P 点的**曲率**，它表示切线的转角对弧长的变化率，描述了曲线的弯曲程度。

考虑到式（1.4.63），又可将式（1.4.73）写成

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s^2}=\frac{\boldsymbol{n}}{\rho} \tag{1.4.75}$$

由此求得曲率半径的表达式

$$\frac{1}{\rho}=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}s^2}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}s^2}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}s^2}\right)^2} \tag{1.4.76}$$

现在我们回到质点的加速度式（1.4.67），将式（1.4.75）代入，得

$$\boldsymbol{a}=\dot{v}\boldsymbol{\tau}+\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n} \tag{1.4.77}$$

式（1.4.77）的第二项叫**法向加速度**，量值等于速度的平方除以轨道的曲率半径。上式给出了质点的加速度矢量沿轨道的三个自然轴分解式。由它可得出质点加速度沿自然轴的分量

$$a_\tau = \dot{v}, \qquad a_n = \frac{v^2}{\rho}, \qquad a_b = 0 \tag{1.4.78}$$

可见，加速度在副法线上的投影恒等于零。质点的加速度位于密切平面内，就是说，它只有两个分量：沿切线的切向加速度和沿法线的法向加速度。从这些结论，我们对密切平面的理解又进了一步。密切平面就是曲线在给定点处通过切线 $\boldsymbol{\tau}$ 和主法线 $\boldsymbol{n}$ 作的一个平面。质点的加速度始终位于密切平面内，且偏向轨道凹的一方。质点的法向加速度（当 $v \neq 0$ 时）只有在无穷大曲率半径（$\rho \to \infty$）的情形下才等于零。或者换句话说，质点的法向加速度只有轨道的曲率等于零($k=0$)时才等于零。加速度大小的平方

$$a^2 = \dot{v}^2 + \frac{v^4}{\rho^2} \tag{1.4.79}$$

对于曲线运动来说，法向加速度 a_n 与速度正交，又由于曲率半径 $\rho \neq \infty$，故法向加速度 $a_n \neq 0$，而且是 $a_n > 0$。由此可见，法向加速度的作用只是引起速度的方向不断地改变，而与速度大小的改变无关。

1.5 动量守恒定律

1.5.1 封闭系统

自由运动，质点不受其他物体的影响，在惯性系中其速度不变。相反，若质点之间有相互作用，其速度就要随时间变化。但是，质点之间彼此相互作用引起速度变化并不是独立的，而是相互有联系的。为了阐明这个关系，需要引进封闭力学系统的概念。所谓**封闭系统**应当理解成这样一些质点的集合：它们彼此间相互作用而不和系统以外的其他物体作用。

1.5.2 动量守恒定律

封闭系统存在着一系列与速度有关且不随时间变化的量。自然，这些量在力学中起着特别重要的作用，这些不随时间变化的量，就是通常所说的**守恒量**，或者**运动积分**。

守恒量其中之一就是封闭系统的总动量，它是封闭系统中所包含的每一质点动量的矢量和。质点的动量矢量和它的速度有一个简单的关系：动量正比于速度。对于每一个质点，比例系数是能表示出质点特征的量，叫做**质量**。如用 $\boldsymbol{p}$ 表示质点的动量矢量，用 m 表示其质量，我们可以把质点**动量（线动量）**写成

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} \tag{1.5.1}$$

封闭系统中所有质点动量 $\boldsymbol{p}$ 的矢量和就是系统的**总动量**

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2+\cdots=m_1\boldsymbol{v}_1+m_2\boldsymbol{v}_2+\cdots=\sum_{\alpha=1}m_\alpha\boldsymbol{v}_\alpha \qquad (1.5.2)$$

式中，用希腊字母下标表示质点的序号，求和仅是对系统中所包含的质点进行。这个量不随时间变化，即

$$\boldsymbol{P}=\text{const} \qquad (1.5.3)$$

const 是英语中 constant（常量）一词的缩写，为书写简便，也经常用一个字母 C 表示常量。封闭系统的总动量守恒，这个结论叫**动量守恒定律**。这个定律为迄今为止科学的发展所证实，是自然界一个普遍定律。

在动量守恒定律中包含一个新的量——质点的**质量**。利用这个定律可以确定质点的质量比。实际上我们可以设想两个粒子相互碰撞，它们的质量分别记作 m_1 和 m_2。用 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 表示碰撞前的粒子速度，而且 $\boldsymbol{v}_1'$和 $\boldsymbol{v}_2'$表示碰撞后的粒子速度。依据动量守恒定律得

$$m_1\boldsymbol{v}_1+m_2\boldsymbol{v}_2=m_1\boldsymbol{v}_1'+m_2\boldsymbol{v}_2' \qquad (1.5.4)$$

如以 $\Delta\boldsymbol{v}_1$ 和 $\Delta\boldsymbol{v}_2$ 分别表示两个粒子速度的变化

$$\Delta\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{v}_1'-\boldsymbol{v}_1,\qquad \Delta\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{v}_2'-\boldsymbol{v}_2 \qquad (1.5.5)$$

则式（1.5.4）可以重新写成下面的形式

$$m_1\Delta\boldsymbol{v}_1+m_2\Delta\boldsymbol{v}_2=0 \qquad (1.5.5)$$

由此得

$$\Delta\boldsymbol{v}_2=\frac{m_1}{m_2}\Delta\boldsymbol{v}_1 \qquad (1.5.6)$$

因此，两个相互作用的粒子速度的变化与它们的质量成反比。利用上述关系可以依据速度的变化确定它们的质量比。所以我们可以取某一物体的质量作为单位，而所有其他物体的质量都去和它进行比较。物理学中常用的质量单位是千克（kg）或克（g）。

因为动量是矢量，所以动量守恒定律可以分解为三个独立的守恒定律。总动量守恒就是总动量的三个分量都不随时间变化。在 1.10 节我们还要再次讨论动量守恒问题。

力学系统运动时，决定系统状态的量随时间而变化。但是却有这些量的某些函数，在运动时它们保持着只依赖于起始条件的恒定值，这种函数叫**运动积分**，或者**守恒量**。动量是我们遇到的第一个这样的运动积分。

但是并非所有的运动积分都会在力学中同样起着重要的作用。运动积分中有一些积分，它们的不变性有深刻的根源，这些根源是与空间和时间的一些基本性质——它们的均匀性和各向同性——相联系着的。例如，动量守恒就是由于空间均匀性而产生的。

1.5.3 可加性

所谓**可加性**，即对于由几部分组成而各部分之间作用又可忽略的系统，它们的值等于各组成部分的值之和。这些运动积分代表的量是守恒的，都具有重要而普适的可加性。

可加性赋予相应的量以特别重要的力学作用。比如说，假设有两个物体在某段时间内相互作用，既然是无论作用前或作用后，整个系统的每个可加积分都等于两个物体单独存在时它们的值之和，那么，如果已经知道在作用前物体的状态，这些量的守恒定律使我们有可能去做一系列关于作用后物体状态的结论。

1.5.4 反冲运动

动量守恒定律是自然界一个基本定律，在许多现象中都会显现出来。特别是，它是反冲运动的理论基础。

我们来看一下如何求火箭速度与其质量变化的依赖关系。设火箭在某时刻 t 的速度为 $\boldsymbol{v}$，质量为 M。设在此时刻火箭开始喷气，气体相对于火箭的速度为 $\boldsymbol{u}$。经过时间 $\mathrm{d}t$，火箭质量减少而变为 $M+\mathrm{d}M$，这里 $-\mathrm{d}M$ 是喷出气体的质量。速度增加而变为 $v+\mathrm{d}v$。显然，初始动量等于 Mv。而 $t+\mathrm{d}t$ 时刻火箭的动量等于 $(M+\mathrm{d}M)(v+\mathrm{d}v)$（量 $\mathrm{d}M$ 是负的），而喷出气体的动量等于 $-\mathrm{d}M(v-u)$，很清楚，这是因为气体相对于地球的速度等于 $v-u$（见图 1.14）。依据动量守恒定律，火箭加喷出气体组成的系统在时刻 t 和时刻 $t+\mathrm{d}t$ 的动量应相等



图 1.14 反冲运动示意图

$$Mv=(M+\mathrm{d}M)(v+\mathrm{d}v)-\mathrm{d}M(v-u) \tag{1.5.7}$$

由此得

$$M\mathrm{d}v+u\mathrm{d}M+\mathrm{d}M\mathrm{d}v=0 \tag{1.5.8}$$

在式（1.5.8）中略去二级无穷小量 $\mathrm{d}M\mathrm{d}v$ 得

$$M\mathrm{d}v+u\mathrm{d}M=0 \tag{1.5.9}$$

将上式分离变量

$$\frac{\mathrm{d}M}{M}=-\frac{\mathrm{d}v}{u} \tag{1.5.10}$$

我们假设，气体流动的速度不随时间改变。于是，式（1.5.10）可改写为

$$\mathrm{d}\ln M=-\mathrm{d}\,\frac{v}{u} \tag{1.5.11}$$

由此得

$$\ln M + \frac{v}{u} = \text{const} \tag{1.5.12}$$

const(常数)的值由火箭运动的初始条件确定。设当 $v=0$ 时,火箭的质量等于 M_0

$$\ln M + \frac{v}{u} = \ln M_0 \tag{1.5.13}$$

由此最终得到

$$v = u\ln\frac{M_0}{M} \tag{1.5.14}$$

这个公式确定了火箭速度与其质量改变之间的关系。

1.6 伽利略变换

1.6.1 经典力学的时空观

理论力学是研究物体机械运动普遍遵循的基本规律的一门学科。大家知道,所谓**机械运动**,就是物体在空间的相对位置随时间而改变的现象。因此,**空间和时间**是力学的基本概念。这些概念都是客观现实的反映。

空间和时间是物质存在的客观形式。它们的性质可以直接通过感官或借助于仪器和实验为人们所认识。在这种认识过程中,形成了近似地反映客观实在的观念、概念。

我们先来讨论空间的性质,为此任取两点 P_1 和 P_2。这两点相对于某参考系 K 的位置由 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$ 给出

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{r}_1 &= x_1\boldsymbol{e}_x + y_1\boldsymbol{e}_y + z_1\boldsymbol{e}_z\\ \boldsymbol{r}_2 &= x_2\boldsymbol{e}_x + y_2\boldsymbol{e}_y + z_2\boldsymbol{e}_z\end{aligned}\right\} \tag{1.6.1}$$

由点 P_1 到点 P_2 的矢量为

$$\boldsymbol{r}_{12} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 \tag{1.6.2}$$

以后下标 1, 2 书写的次序相应于从 P_1 到 P_2 的矢量方向。而两点间的距离则等于矢量的模 r_{12},即

$$r_{12} = [(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2]^{1/2} \tag{1.6.3}$$

根据对速度甚小于光速的许多客观物体所进行的实验断定,**相对于做任意运动的不同参考系,在给定的时刻给定空间间隔的大小是相同的**。这一论断如用分析形式表示,可取两个参考系:原点在 O 点并以 $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ 为单位矢量的 K 系和原点在 O' 并以 $\boldsymbol{e}'_x$, $\boldsymbol{e}'_y$, $\boldsymbol{e}'_z$ 为单位矢量的 K' 系(见图 1.15)。相对于 K 系点 P_1 与点 P_2 之间的距离等于 r_{12},而相对于 K' 系这两点的距离等于

$$r'_{12}=|\boldsymbol{r}'_2-\boldsymbol{r}'_1| \tag{1.6.4}$$

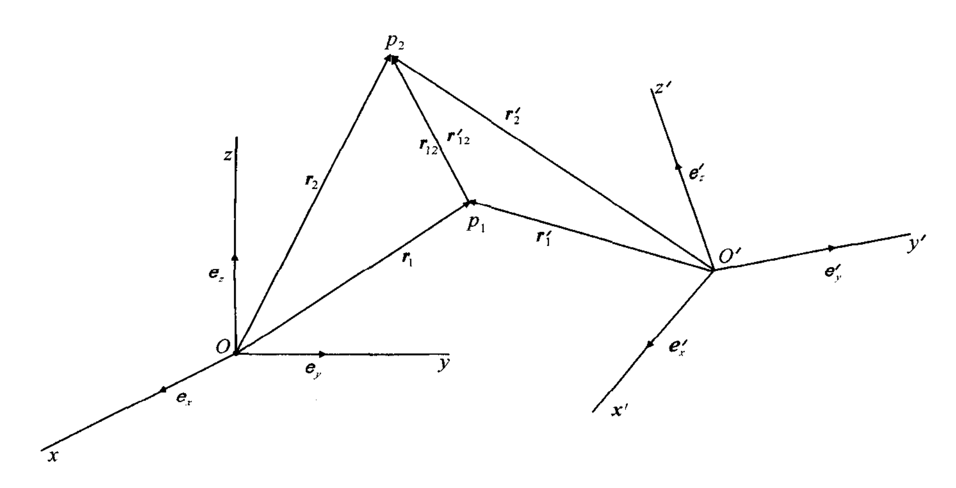


图 1.15 不同参照系中两点间的距离相等

其中

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{r}'_2&=x'_2\boldsymbol{e}'_x+y'_2\boldsymbol{e}'_y+z'_2\boldsymbol{e}'_z\\ \boldsymbol{r}'_1&=x'_1\boldsymbol{e}'_x+y'_1\boldsymbol{e}'_y+z'_1\boldsymbol{e}'_z\end{aligned}\right\} \tag{1.6.5}$$

可以断定，无论参考系 K' 相对参考系 K 做任何运动，在同一时刻所取的距离 r_{12} 和 r'_{12} 总是彼此相等的，即

$$[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2+]^{1/2}=[(\Delta' x)^2+(\Delta' y)^2+(\Delta' z)^2+]^{1/2} \tag{1.6.6}$$

其中，$\Delta x=x_2-x_1$，$\Delta x'=x'_2-x'_1$，余类推。众所周知，其中任意两点的距离均由式（1.6.3）规定的空间，叫做**欧几里得空间**。因此，依据由实验证明的假设式（1.6.6）可以得出结论：**经典力学中的空间是欧几里得空间**。

参考系 K' 与 K 之间的变换为正交变换，即

$$\boldsymbol{r}'_{12}=\boldsymbol{r}_{12} \tag{1.6.7}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{r}'_{12}&=\boldsymbol{r}'_2-\boldsymbol{r}'_1=(\Delta x')\boldsymbol{e}_{x'}+(\Delta y')\boldsymbol{e}_{y'}+(\Delta z')\boldsymbol{e}_{z'}\\ \boldsymbol{r}_{12}&=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1=(\Delta x)\boldsymbol{e}_x+(\Delta y)\boldsymbol{e}_y+(\Delta z)\boldsymbol{e}_z\end{aligned}\right\} \tag{1.6.8}$$

从式（1.6.7）可以得到同一点相对于不同参考系的位矢之间一个简单而又重要的关系，设 $\boldsymbol{R}$ 为坐标系 K' 的原点相对于 K 的位矢，$\boldsymbol{r}$ 为某一点 P 相对于坐标系 K 的位矢，而 $\boldsymbol{r}'$ 为同一点相对于坐标系 K' 的位矢。在这种情况下，令 $\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{r}'_2=\boldsymbol{r}'$，$\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{R}$，$\boldsymbol{r}'_1=0$。根据式（1.6.7）可得

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{R}+\boldsymbol{r}' \tag{1.6.9}$$

下面我们来讨论时间问题。

在力学中有规则重复发生的现象——周期过程——的概念起着非常重要的作用，例如原子分子的振动，摆的振动，地球自转，地球公转都是这类过程。凡可实现周期过程的物体，都可以作为**时计**，而其周期的持续时间则可作为时间标准。当然，真实周期过程的周期持续时间只有在一定的精确范围内才是常数。在1960年以前，时间标准曾是以年平均太阳日的1/86400为时间单位，称之为秒。鉴于地球转动的不规律性（已由原子钟的实验证明）和平均回归年的变化，国际单位制（SI）中时间单位秒取为铯-133原子基态的两个超精细结构能级之间跃迁辐射周期9192631770倍的持续时间。

在经典力学中，假定存在着任意位移中不改变其周期的那种时计。这种时计可以在任意参考系中测出不同过程的持续时间，并能确定：相对于任意运动着的不同参考系某一给定时间间隔的持续时间是相同的，即

$$t_{12}=t'_{12} \tag{1.6.10}$$

这里，$t_{12}=t_2-t_1$ 表示一定过程相对参考系 K 的持续时间，$t'_{12}=t'_2-t'_1$ 表示同一过程相对于参考系 K' 的持续时间。式（1.6.10）表明，时间进程在两个计算系统是一样的。此外，还假设在对某一过程的持续进行测量时不会影响持续时间本身的长短。时间绝对性的假定是经典力学概念的基础。

根据式（1.6.10），在任意参考系中，可以任意选择同一计时原点，从而引入一个时间坐标 t。

利用上述的概念和假设，可以用实验方法确定质点运动的规律，也就是相对于给定参考系 K 确定质点在任一时刻的位置，并借助于该质点的位矢，将此位置表为时间的函数

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t) \tag{1.6.11}$$

应该指出，在经典力学中既假定了坐标的连续性，也假定了时间的连续性，从而也假定了函数式（1.6.11）的连续性。

1.6.2 伽利略变换

设有两个不同的计算系统 K 和 K'，其中 K' 相对于 K 以速度 $\boldsymbol{V}$ 运动。依据式（1.6.9）和（1.6.10），同一质点 P 在系统 K 和 K' 里的位矢 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}'$ 及两个坐标系时间 t 和 t' 之间的联系为

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{r}&=\boldsymbol{V}t+\boldsymbol{r}'\\ t&=t'\end{aligned}\right\} \tag{1.6.12}$$

公式（1.6.12）称为**伽利略变换**。它是从一个惯性系到另一个惯性系的变换。

若 K 和 K' 均为笛卡儿坐标系，且系统 K' 移动的方向与 x 轴方向一致，且初始时刻两坐标系原点 O 与 O' 重合，则式（1.6.12）可简化为

$$\left.\begin{aligned} x &= Vt + x' \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= t' \end{aligned}\right\} \tag{1.6.13}$$

伽利略变换式表明

$$\mathrm{d}t = \mathrm{d}t' \tag{1.6.14}$$

即在两个惯性参考系中计量的时间间隔相等。因此，可以确定两个惯性系中的速度。对式（1.6.12）求微商得

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{V} \tag{1.6.15}$$

式中，$\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{v}'$ 分别表示质点相对于 K 和 K' 两惯性系的速度。式（1.6.15）是质点在两惯性系中速度相加定理。习惯上称 $\boldsymbol{V}$ 为**牵连速度**，$\boldsymbol{v}'$ 为**相对速度**，$\boldsymbol{v}$ 为**绝对速度**。

对速度式（1.6.15）取微商，得两惯性系中加速度

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' \tag{1.6.16}$$

这就是说，在所有惯性系中，不论它们之间的速度 $\boldsymbol{V}$ 如何，所观测到的质点的加速度都相同，或者说，**质点的加速度是伽利略变换的不变量**。

在伽利略变换中，默认了经典力学关于时间变换式（1.6.10）这一基本假设。严格说来，这个假定是不正确的，但是，非绝对时间得出的结论只有在和光速可比较的速度下才显示出来。在那种情况下，伽利略变换被洛伦兹变换[①] 所代替。经典的速度合成法则式（1.6.15）已不能满足。本课程所探讨的情形都是与光速相比相当小的速度情形，此时绝对时间的假定还是正确的。

建立在绝对时间假定上的力学叫做**经典力学**（或**古典力学**）。

1.7 质心与质心坐标系

动量守恒定律与质量一个重要性质——质量守恒定律——联系着。为了阐明

① 当 x' 与 x 轴重合，且初始时刻两坐标原点亦重合时，洛伦兹变换式为

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$
$$y = y'$$
$$z = z'$$
$$t = \frac{t' + \dfrac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

式中，$\beta = \dfrac{V}{c}$，c 为光速。

这个定理的内容，我们来讨论**质心**的概念。

封闭力学系统的动量相对于不同的（惯性）坐标系有不同的值。如果坐标系 K'以速度 $\boldsymbol{V}$ 相对坐标系 K 运动，即式（1.6.15），运动着的质点 α 相对于这两个坐标系的速度 $\boldsymbol{v}'_\alpha$ 和 $\boldsymbol{v}_\alpha$ 以下式联系

$$\boldsymbol{v}_\alpha = \boldsymbol{v}'_\alpha + \boldsymbol{V} \tag{1.7.1}$$

因此，在这两个坐标系中，系统的总动量 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{P}'$的关系由下式给出

$$\boldsymbol{P} = \sum_\alpha m_\alpha \boldsymbol{v}_\alpha = \sum_\alpha m_\alpha \boldsymbol{v}'_\alpha + \boldsymbol{V}\sum m_\alpha \tag{1.7.2}$$

若令

$$\boldsymbol{P}' = \sum_\alpha m_\alpha \boldsymbol{v}'_\alpha \tag{1.7.3}$$

则式（1.7.2）可以写为

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}' + \boldsymbol{V}\sum m_\alpha \tag{1.7.4}$$

若以 M 表示系统中所有质点质量之和

$$M = \sum_\alpha m_\alpha \tag{1.7.5}$$

则式（1.7.4）可以写成

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}' + M\boldsymbol{V} \tag{1.7.6}$$

值得注意的是，总存在着这样的坐标系 K'，在其中总动量变为零，即使得式（1.7.6）中的 $\boldsymbol{P}'=0$，从而求得这个坐标系的速度等于

$$\boldsymbol{V} = \frac{\boldsymbol{P}}{M} = \frac{\sum_\alpha m_\alpha \boldsymbol{v}_\alpha}{\sum_\alpha m_\alpha} \tag{1.7.7}$$

在 $\boldsymbol{P}'=0$ 的情况下，自然式（1.7.6）变成

$$\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{V} \tag{1.7.8}$$

如果力学系统的总动量等于零，那么就说系统对相应的坐标系是静止的。这是单个质点静止概念很自然的推广。相应地，式（1.7.7）所给出的速度 $\boldsymbol{V}$ 具有总动量不等于零的“系统整体运动”的意义。由此可见，动量守恒定律使我们有可能很自然地给出力学系统**整体**静止和运动的概念。

公式（1.7.7）指出，系统的整体的动量 $\boldsymbol{P}$ 与速度 $\boldsymbol{V}$ 的联系同一个质量等于系统中所有质点质量之和 $M = \sum_\alpha m_\alpha$ 的质点一样。这样我们看到，一个复杂物体的质量等于它各部分质量之和，这就是所谓**质量守恒定律**。这种情况可以简明地表述为**质量的可加性**。这个结论好像是自然而然的。但是，它并不是凭空想像，而是物理定理的内容，是动量守恒定律的结果。

公式（1.7.7）可以表示成下式对时间的微商

$$r_c \equiv \boldsymbol{R} = \frac{\sum\limits_{\alpha} m_\alpha \boldsymbol{r}_\alpha}{\sum\limits_{\alpha} m_\alpha} \tag{1.7.9}$$

我们定义这个矢量，把它作为系统所有质点的平均位矢，求平均时的权重正比于质点的质量。可以这样说，系统的整体速度是由式（1.7.9）所给出位矢的点在空间移动的速度，这个点称为**质心**，也叫做**惯性中心**。后一名称似乎更能体现出其物理含义。

封闭系统的动量守恒定律可以简述为系统的质心在做等速直线运动。这是质点惯性定律的自然推广。在 1.1 节我们曾对一个自由质点阐述这个定律，一个质点的质心与它自身重合。

由于封闭质点系统的动量守恒，所以质心的速度不随时间改变，我们可把坐标系固定在质心上，这样质心是静止的坐标系，叫做**惯性中心坐标系**，或者**质心坐标系**。显然，封闭质点系统的总动量在该坐标系中为零。这样就不必观察无关紧要的系统整体的等速直线运动，系统内部的过程会显露得更明显。由于这个原因，质心坐标系是物理学中经常用到的坐标系。例如，在研究散射（或碰撞）问题时，常用两种不同的坐标系，其中之一就是在随质心运动的坐标系中来观察散射（或碰撞），这就是质心坐标系，多为理论工作者所采用；另一种是在与地球相联的坐标系，即所谓**实验室坐标系**中观察，常为实验工作者所采用。在实验允许的误差范围内，常把实验室坐标系视为静止坐标系。

质心反映了系统质量的平均位置,这个位置可能与系统其中一个质点的位置重合,也可能不与任何一个实际质点位置重合。显然,如果质量分布具有对称面、对称轴、对称中心,则质心必在这些面、轴、点上。均质物体的几何中心就是物体的质心。物体的几何中心只取决于物体的几何形状和尺寸,因之又称为**形心**。

将式（1.7.9）投影于某直角坐标系 $Oxyz$ 中，可得到质心坐标的表达式为

$$x_c = \frac{\sum\limits_{\alpha} m_\alpha x_\alpha}{\sum\limits_{\alpha} m_\alpha}, \qquad y_c = \frac{\sum\limits_{\alpha} m_\alpha y_\alpha}{\sum\limits_{\alpha} m_\alpha}, \qquad z_c = \frac{\sum\limits_{\alpha} m_\alpha z_\alpha}{\sum\limits_{\alpha} m_\alpha} \tag{1.7.10}$$

对于连续体，只需要把质点质量换成在体积元 $\mathrm{d}v$ 内所包含的质量 $\rho \mathrm{d}v$，求和换成对整个物体的体积进行积分即可，其中 ρ 是质量密度。

有些物体的形体虽然比较复杂，但往往是由一些简单形体所组成，这样的形体习惯上叫**组合形体**。求组合形体的质心一般有两种方法，即分割法和负体积法（负面积法）。分割法就是将组合形体分割成几个简单形体，而这些简单形体的质心通常是已知的或易求的，这样整个组合形体的质心就可以用式（1.7.10）直接求得。若物体或薄板内切去一部分（如有空穴的物体），则质心仍可应用与分割法相同的公式计算，只是切去部分的体积或面积应取负值。

1.8　牛顿第二定律（Ⅰ）

1.8.1　牛顿第二定律

如果质点在做自由运动，也就是说不与周围的物体作用，则其动量守恒。反之，若质点与周围物体作用，其动量就要随时间变化。于是，我们可把质点动量的变化看作来自周围物体作用的量度。作用越强，单位时间动量变化越大。因此，很自然地把这个作用看作质点的动量对时间的微商，这个微商叫做做用在质点上的**力**。用 $\boldsymbol{F}$ 表示作用在所研究质点上的力，则可写成

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F} \tag{1.8.1}$$

式中，$\boldsymbol{p}$ 表示质点的动量。方程（1.8.1）叫做质点的**运动方程**。因为它本身就是一个微分方程，所以又称**运动微分方程**。由于它描述了质点的动量随时间变化的规律，从而又名**动量定理**。式（1.8.1）就是**牛顿第二定律**。尽管该方程简单而为人们所熟悉，它却包括了差不多整个经典力学的基础，是经典力学的基本方程。

由于质点的动量为质点的质量与速度的乘积，即 $\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}$。所以运动方程也可以写成下面的形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\boldsymbol{v})=\boldsymbol{F} \tag{1.8.2}$$

经典力学中视 m 为常量① 所以上式还可以写成

$$m\boldsymbol{a}=\boldsymbol{F} \tag{1.8.3}$$

可见，作用在质点上的力等于质点的加速度与质量的乘积。这个结论就是通常所谓的牛顿第二定律的内容。牛顿第二定律可更正确地表述为：**质点动量的时间变化率正比于作用在质点的力，并指向力的方向。**

方程（1.8.3）首先假定位移和时间间隔的定量测量使我们能够得到一物体在一定时刻的加速度的唯一确定值。回想一下，位移只能相对于其他物理客体来测量，自然我们会想到，同惯性定律一样，牛顿第二定律也离不开参考系的选择。事实上，我们默契地假定，用来测量加速度的参考系是一个惯性系。倘若坐标系所固接的参考系对惯性系有加速度，那么式（1.8.3）就不再成立了。

在经典力学领域，质点的速度远小于光的速度，质点的质量和力都可认为与惯性参考系的速度 $\boldsymbol{V}$ 无关。因此结合式（1.6.16）和（1.8.3）得知，牛顿第二

① 质量 m 看作与速度无关的常量，这是经典力学一个基本假设。当质点的速度远小于光速时，这假设是个良好的近似，并被在经典力学基础上获得的满意结果所证实。

定律在两个惯性系中是相同的。或者扩展地说，在所有惯性系中力学规律都相同。这就是 1.1 节所讨论的伽利略相对性原理的含义。在经典力学中，力和质量都可视为伽利略变换的不变量，因而**牛顿定律相对于伽利略变换具有不变性**。可见，经典力学中相对性原理是以伽利略变换为基础的。

在所有惯性参考系中，运动方程具有相同的形式，这就是说，所有这些参考系都是平权的，即不存在这样的力学问题，当研究这些力学问题时，可以从惯性参考系中区分出更优越或更独特的参考系来，使之具有静止——**绝对静止**——的性质。或者说，不存在这样的参考系，使它与之刚性连接的空间具有牛顿的“绝对空间”的性质。从而关于两个惯性参考系中哪一个“在实际上”是静止的，哪一个是运动的，这样的问题是没有意义的。

1.8.2 力的独立作用原理

方程（1.8.3）表明，加速度矢量和合力矢量同方向。这是一个重要结果，它代表着这样的事实：几个不同力的加速度效果按**线性**方式相加。这一结果提供了“运动独立性”的动力学基础，即**作用于质点的每一个力所产生的力学效应与其他力无关**。这一结论通常称为**力的独立作用原理**。

由于存在力的独立作用原理，给人们分析力带来极大方便。试想如果上述力的独立作用原理不成立，则许多力作用于一质点的动力学分析将是极其复杂和困难的。

在经典力学中，由于质点运动甚小于光速，人们在接受力的作用即时传递假设的前提下，承认力的独立作用原理，即每个力的作用完全独立、互不相干，因而作用于一质点的诸力可按矢量法则相加

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \cdots + \boldsymbol{F}_n = \sum_{i=1} \boldsymbol{F}_i \tag{1.8.4}$$

$\boldsymbol{F}$ 称为诸力的**合力**。所以，方程（1.8.1）～（1.8.3）各式中右侧的 $\boldsymbol{F}$ 为作用在被研究质点上的合力。

1.8.3 对牛顿第二定律的评述

当 $\boldsymbol{F}=0$ 时，根据式（1.8.2）得到，物体的速度是一常数

$$\boldsymbol{v} = \text{const} \tag{1.8.5}$$

即我们得到了牛顿第一定律的数学表述。但是，无论如何也不可能由此得出这样的结论：牛顿第一定律的全部内容都是牛顿第二定律的当然结果。惯性定律式（1.8.5）只是我们采用了确定的参考系（惯性参考系）时才作为牛顿第二定律式（1.8.2）的结果得出。但牛顿第一定律的物理内容比这要广泛得多，它可以包括在如下的论断中：存在着这样的参考系，物体在其中若不受力作用，将做等速直

线运动。

就物理量——力——的定义来说，牛顿第二定律式（1.8.2）是常说的力的“动力学定义”呢？还是自然定律呢？

在回答这个问题之前，首先要问：什么是自然定律？以数学方程的形式写出的物理量间的一些关系，如果它的正确性不是由定义，即不是由我们预先给定的条件推出，而是由于这些关系在某种近似下反映了外部世界的客观规律性，那就称为自然定律。这种关系应该由实验来检验，而要有可能做这样的检验，必须关系中所出现的一切量各有独立的测量方法。

方程（1.8.2）满足上述要求：其中所出现的量（质量、速度、加速度和力）都有前述的独立定义，因此，式（1.8.2）表示自然定律。牛顿第二定律并不是力的动力学定义，这里所显现出的只是力的动力学性质。在式（1.8.2）的右方是施于物体上所有力之和。一般情况下，力是物理的位置、速度和时间的确定函数

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},t) \tag{1.8.6}$$

因此，物体的质量与其加速度的乘积并不是力的定义，但是，根据自然定律它等于力［由函数式（1.8.6）确定］。

需要强调指出的是，牛顿第二定律只有当 $\boldsymbol{F}$ 的函数被确定以后才能取得具体意义。在这种情况下，也就是函数 $\boldsymbol{F}$ 的形式是已知的。原则上讲，由运动方程可以求出质点的速度和坐标对时间的依赖关系，换句话说，也就是可以求出运动的轨道。同时，除了函数的形式以外，也就是除了和周围物体相互作用的规律以外，还应给出通常所说的**初始条件**：作为开始的某时刻质点的位置和速度

$$\boldsymbol{r}|_{t=t_0}=\boldsymbol{r}_0,\qquad \boldsymbol{v}|_{t=t_0}=\boldsymbol{v}_0 \tag{1.8.7}$$

因为运动方程确定在每一个时间间隔 dt 内速度的增量（$d\boldsymbol{v}=\frac{\boldsymbol{F}}{m}dt$），而速度可以确定质点在空间中位置的变化（$d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{v}dt$），显然，再给定了质点的初位置和初速度以后，对于完全确定进一步运动实际上就足够了。这也正是 1.2 节所述质点的力学状态由坐标和速度确定的含义。

以上所述关于运动微分方程解的单值性的论断称为**力学的因果性原理**或**力学确定论原理**，可以表述如下：**质点在任何时候的力学态单值地决定于它的初力学态和运动条件**①。

这里所说质点的运动条件，是指质点与周围物体的相互作用，这种相互作用

---

① 根据微分方程理论，常微分方程

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\boldsymbol{F}$$

在给定边界值的情况下有唯一连续解 $\boldsymbol{F}(t)$，在微分方程中称为**解的唯一性定理**。

由式（1.8.6）的合力 $\boldsymbol{F}$ 表示。

在力学的因果性原理中，质点的初力学态和数学上以函数$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},t)$表示出的运动条件是质点在 $t>t_0$ 以后的全部时间中力学态的原因。

经典科学（也包括量子力学）中强调的是不依赖于时间的定律，一旦给定了初始条件，这些永恒的定律永远确定了未来，如同它确定了过去一样。

在牛顿力学的应用范围内（运动速度甚小于光速，量子效应可忽略不计），果真事事都那么“确定”吗？自 20 世纪 60 年代以来，越来越多的研究对这个问题提出了否定的回答。时至今日，人们已认识到，牛顿定律包含的“不确定”行为或称作随机行为，远多于由它所给出的“确定”行为。关于牛顿定律的内在随机性问题将在非线性力学一章讨论。

力学确定论概念还可以从下面的讨论中明显看到其局限性。

若合力 $\boldsymbol{F}$ 给定为宗量 $\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{v}$ 和 t 的单值函数（在力学问题中总是如此假定的），则方程（1.8.2）满足初始条件式（1.8.7）的解是**唯一**的。我们用在微分方程的数值积分中所用的方法来解方程（1.8.2）。设要求质点在时刻 t 的位置 $\boldsymbol{r}$ 和速度 $\boldsymbol{v}$，为此目的把时间间隔 $t-t_0$ 分成 n 个小部分：t_0，t_1，…，$t_n=t$，用泰勒级数逐一求出 $\boldsymbol{r}_k$，$\boldsymbol{v}_k$，（$k=1, 2, \cdots, n$）

$$\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{v}_0(t_1-t_0) \tag{1.8.8}$$

$$\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{v}_0+\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\right)_{t=t_0}(t_1-t_0)=\boldsymbol{v}_0+\frac{1}{m}(\boldsymbol{F})_{t=t_0}(t_1-t_0) \tag{1.8.9}$$

等等。在泰勒级数中我们每次只保留 t_k-t_{k-1}的一次幂。在这个做法中，我们在方程（1.8.9）中用到了微分方程（1.8.2），也就是由它找出了加速度

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\right)_{t=t_0}=\frac{1}{m}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{v}_0,t_0) \tag{1.8.10}$$

以及所有以后的时刻 t_k 的加速度。减少时间间隔 t_k-t_{k-1}，用这样的方法可以用任何预先给出的精确度算出 $\boldsymbol{r}_k$，$\boldsymbol{v}_k$。可见，运动方程对质点加速度的**线性**性质，对求解的**单值性**是极其重要的。

在上述计算中，要求必须把时间间隔 $t-t_0$ 取得足够小。如果时间间隔 $t-t_0$ 太大，则力学确定论原理是无意义的。随着时间的流逝，物体将不可避免地处于不能应用质点概念的那类相互作用之中。物体的**碰撞**现象可以作为这类相互作用的例子。若在碰撞前，某种转动的存在不影响物体质心的运动，我们就将物体看成质点（1.15 节），这样，直到碰撞时未定的转动（由于我们的忽略）实质上将影响物体碰撞后的运动性质，例如乒乓球赛中打出去的旋转球就属此种情况，因而力学确定论（单值的确定性）被破坏。即使应用比质点更具普遍性的概念，同时考虑到转动来给定物体的力学态，当时间 $t-t_0$ 增大时，也同样不可避免地会遇到这样的相互作用，在这种相互作用下，物体的**形变**是极为重要的，也

就是说，我们近似的力学理论的适用条件又遭到了破坏。

试图在时间间隔 $t-t_0$ 增大时得到后继力学态的完全确定性，必将引导到需要更加扩充所采用的力学理论的普遍性，需要考虑更为复杂的运动条件，最后必然要对物体做如此详尽的考察：要考虑到该物体的分子和原子的结构。

其次，若按照拉普拉斯的思想，为使力学确定论充分实现，必须设想所有原子的初力学态是给定的。然而就是这样不切实际的“精细性”也不能使这一确定论得到保证，因为正如我们现在所知道的，将原子看作质点只有在一定的条件下才可能。而一般说来，原子是一个复杂的系统，遵循**量子力学**规律，而不能完全用经典力学来描写。

力学确定论原理的局限性随着科学和技术的进步越来越看得清楚。实际上它只适于可积系统和线性力学（参见非线性力学一章）。

1.8.4 牛顿第三定律

现在我们回过头来考察封闭系统。大家知道，封闭质点系的总动量守恒

$$\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{p}_3+\cdots+\boldsymbol{p}_\alpha+\cdots=\mathrm{con}st \tag{1.8.11}$$

式中，$\boldsymbol{p}_\alpha$ 是第 α 个质点的动量。将上式对时间求微商得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_2}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_3}{\mathrm{d}t}+\cdots+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_\alpha}{\mathrm{d}t}+\cdots=0$$

注意到

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_\alpha}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}_\alpha \tag{1.8.12}$$

这里，$\boldsymbol{F}_\alpha$ 是作用在第 α 个质点的力，于是得到

$$\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3+\cdots+\boldsymbol{F}_\alpha+\cdots=0 \tag{1.8.13}$$

可见，封闭质点系统所有力的合力为零。通常也把没有外力作用的质点系统定义为封闭系统。

特别是，如果封闭系统中只包含两个物体，则由式（1.8.13）可得

$$\boldsymbol{F}_1=-\boldsymbol{F}_2 \tag{1.8.14}$$

上式表明，第一个物体作用于第二个物体上的力和第二个物体作用于第一个物体上的力大小相等而方向相反。这个结论就是著名的**作用和反作用定律**，或者叫做**牛顿第三定律**。

牛顿第三定律实际上是用两个物体组成的封闭系统来叙述的。然而，并不存在这样的理想条件，宇宙万物彼此之间都存在着相互作用，虽然当距离很远时，相互作用将微弱得失去实际重要性。牛顿回避了如何使所需要的效应摆脱所有外界的影响问题，而这个实际困难适足说明牛顿第三定律论断的深远意义。基于有限观察所得的结果已经成功地经受了 300 多年实践的检验，这是对他的深刻理解

力和物理洞察力的高度赞颂。

读者在学习力学的初等教程时，总是把牛顿第三定律作为力学的普适定律之一。然而我们必须补充的是，牛顿第三定律并不是自然界一个**普适**定律，实际上它是一个关于力性质的很强的假设，物理学中有些力并不符合这个定律。牛顿第三定律仅在下述情况才能适用：即一物体（质点）作用于另一物体（质点）上的力是沿着两物体的连线方向，这种力叫做**有心力**或**中心力**。不论中心力是吸引力还是排斥力，第三定律均适用。万有引力和静电力都是中心力，所以牛顿第三定律适用于涉及这两种类型的力的问题。有时，弹性力（它实际上是微观静电力的宏观表现）也具有中心力的性质。例如，由一平直弹簧或弹性弦连接的两个点状物体所受的力即服从第三定律。任何与相互作用物体速度有关的力，具有非中心性质，第三定律不适用这种情况。以有限速度传播的相互作用具有力依赖速度的特征。因此，**运动**电荷间作用力不遵从第三定律，乃因这种力以光速传播。甚至运动物体间的万有引力也是与速度有关的，唯其效应很弱而难检测。要强调的是，第三定律仅适用于两个物体间的相互作用。由于两个粒子间的相互作用使得其中之一或二者辐射能量，甚至产生新粒子，这种问题不属于两体问题。在这种问题中，牛顿第三定律也不成立。

然而一个封闭系统的动量守恒为迄今为止的科学发展所证实。而封闭系统的动量守恒定律并不必须依赖牛顿第三定律。因而**封闭系统的动量守恒是自然界一个普适定律，**它是一个比牛顿第三定律更为普适的定律。

1.8.5 力的基本类型

所有的力都来自不同物体间的相互作用。许多年前，这些相互作用多得弄不清，近代科学发展最重要特色之一是越来越认识到只有少数几种基本不同的相互作用。在 20 世纪以前，人们所熟悉的力就实质来讲只有两类——万有引力和电磁力。1896 年放射现象的发现与 20 世纪 30 年代对核力的研究使得人们又认识了两种新型的力——弱力与强力。但是近些年来科学的发展证实弱力和电磁力实际上是一种力，现在还尚待命名，弱力和电磁力只是这种尚待命名的力的两个不同方面。由于这种力尚未命名，按传统习惯仍把它们作为两种力看待。于是，人们现在所认识的自然中的力共有四种，它们是：

1）引力　由于物体的质量而在物体之间产生的力。引力是人们认识得最早的一种力，关于它的第一个理论是牛顿在 1666 年建立的万有引力论。250 年之后，爱因斯坦又把它发展为广义相对论。万有引力从原则上讲出现于一切质量不为零的粒子之间，然而实际上只有当这些粒子聚集成质量巨大的物体时，它才能显著地发挥作用。地球表面物体所受到的引力通常称为**重力**。

2）电磁力　由于静止的或运动的电荷而产生的力。可以毫不夸张地说，它

几乎是所有宏观力的缔造者。比如，各种材料的内部张力、弹性力、分子间的化学结合力、物体与物体之间的摩擦力等，都是由电磁力造成的。

3）弱力 它仅在微观世界才悄悄地出现，力程极短，约 10^{-15}cm，它的“力所能及”的范围只相当于原子半径的 $1/10^7$。因此，宏观世界的物理现象中没有弱力的踪迹。弱力的强度只有电磁力的 $1/10^{12}$。弱力主要支配一些粒子的衰变及俘获现象（如 β 衰变）。

4）强力 它也是短程力，力程约 10^{-13}cm，所以是一种微观力，在宏观世界里不露声色。大家知道，虽然电力承担着把原子结合在一起的作用，但它本身却妨碍着原子核的存在。原子核含有质子，在电性上互相排斥而又没有产生抵偿作用的负电荷使之稳定。把原子核中的核子（质子和中子）束缚在一起的就是强相互作用。在小于 10^{-13}cm 的距离内，它超过对核子之间的一切其他相互作用而占支配地位，对于大于 10^{-13}cm 的距离，核力很快就变得可略而不计。强力是种异常复杂类型的相互作用，直到大约 0.4×10^{-13}cm，还是吸引力，距离要再小它就变成强排斥力了。它部分是非中心力，即不同于引力和库仑力，它的方向并不在相互作用的粒子的连线上。有点像库仑力只存在于带电粒子之间那样，强力的相互作用只存在于某一类粒子之间，这类粒子称为**强子**。这类粒子，除核子本身外，还包括若干稍轻一点的粒子（介子）和稍重一点的粒子（重子），所有这些粒子都是不稳定的，寿命极短（10^{-8}s 或更短）。

从上面的讨论可见，在经典力学中，弱力和强力实际是没有地位的。经典力学中真正关注的相互作用类型只是电磁的或引力的那些情形。

在我们所做的分类之外，加上我们将称之为“接触力”的一类力——这类力出现在普通物体的机械接触中——不仅有用，而且从经典力学观点来看是非常重要的。虽然这些力只不过是大量原子之间的基本电磁力的宏观表现，但它们对于描述力现象中的大多数常见的相互作用非常有用，把它们单独归类是值得的。尽管这只是一种人为的分类。广义地说，所有我们所熟悉的、具有机械性质的，包括液体或气体施加于一个面上的力，都是这一意义下的接触力。

一个极其重要的事实是，与引力不同，各粒子间的电力既有吸引性也有排斥性，原因是存在着两种不同的电荷。从表面上看，两中性原子在分隔开时完全不会互相施加力（引力的强度只是电磁力的 $1/10^{37}$，可略而不计）。但实际上不然，只有当一原子中的正负电荷都位于同一点时才会如此。实际上电子和原子核是稍为分开一点的，此外，原子也并不是一个刚性结构。虽然当原子孤立时电子所带负电荷分布的“重心”与带正电的原子核重合，但如果有另外的粒子趋近时这一情况是会被扰动的。这方面的一种表现是中性原子之间存在一特征性吸引力，称为**范德瓦耳斯力**。该力在两原子互相接近时迅速增大，比 $1/r^2$ 快得多，详细计算表明，这是同类中性原子之间按 $1/r^7$ 变化的一种力。

而且，还存在另一种力，它在人们企图把中性原子挤压到一起时开始起作用，这是一个正的（排斥）力，随距离减小而增加，甚至比范德瓦耳斯力变化更快。两中性原子间的力，作为它们中心之间的距离的函数，如图 1.16 所示。在 r 的某一数值处，作用力曲线经过零点，这数值（r_0）可以认为是两个原子半径之和，即一个原子的直径（设想两原子相同）。

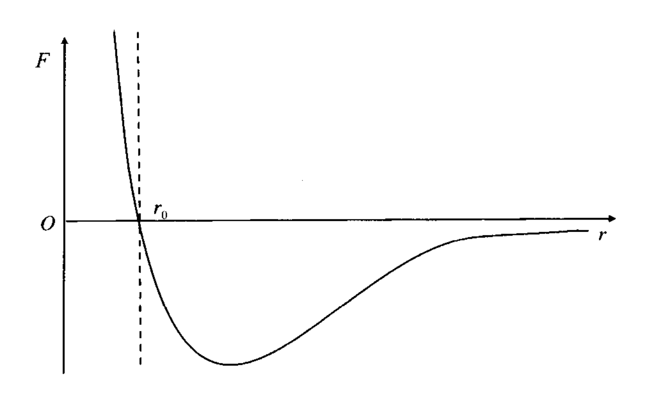


图 1.16 范德瓦耳斯力

当 r 继续减少到 r_0 以下时，力 F 的排斥成分增长得非常陡峭，使原子差不多像一个刚性球。这种情况的一个表现是凝聚物的高度不可压缩性。在图 1.16 中的虚线是对原子间的力的理想化结果，在 $r<r_0$ 时，相应于完全不可穿透性，而在 $r>r_0$ 时，相应于范德瓦耳斯吸引力。

由于在经典力学中要处理的物体差不多都是电中性的，对中性原子间的力有清晰的概念是非常重要的。例如，当一光滑的硬物紧压着另一光滑的硬物时，由于正负电荷分布的变形，就会产生出所谓**接触力**。这种力的特性是，它们随物体间距离的变化比带有电荷间按反平方律的变化要快得多，因而接触力实际上是非常短程的力，当物体间的距离大于约一原子直径时，它们立即下降到可忽略的大小。但是，它们确实与分开的距离有明显的依赖关系。这一事实表明，我们关于“接触”的概念的基本含义并非那么明确。但是，对于不带电的物体，从可以略而不计的力到极为巨大的力之间的过渡非常突然这一事实，使我们有理由假设：物体是完全刚性的，具有一个轮廓清楚的几何边界，在这边界外没有相互作用。这只是一种理想化的处理，实际上只要测量足够精细，就会发现力随距离的变化总是连续的。

前面的讨论集中在把两物体简单地推到一起时起作用的接触力。这种力是垂直于接触面的，我们称之为**法向力**。沿接触面的切向力同样是我们感兴趣的，切向力又叫**摩擦力**。如果忽略摩擦力，这种接触就叫**光滑接触**。

当物体静止时，摩擦力的方向可以这样确定：设想如果没有摩擦力存在，则物体将会在其他已知力的作用下沿着接触面做某个方向的相对滑动，则摩擦力的方向就和这个方向相反。可以想到，这是很自然的结论，因为摩擦力的存在阻碍了物体沿这个方向滑动。当物体滑动时，摩擦力的方向恒与滑动方向相反。总之，摩擦力的存在起着阻碍物体在接触面上滑动的作用。

对于摩擦现象及规律的认识，至今人们掌握得还不多，因为它的真正性质涉及能量转换的复杂规律及微观的物理规律。在理论力学中，只从宏观的观点说明摩擦力的性质，工程上常用 1781 年库仑（Coulomb）的实验结果，称为**摩擦定律**。这个定律实际上仍然是十分粗糙的。现将库仑摩擦定律简述如下：

1）摩擦力有一个不能超过的极限值 F_{max}，当未发生相对滑动时，静摩力 F 满足①

$$F \leqslant F_{max} \tag{1.8.15}$$

这里的 F_{max} 就是**最大静摩擦力**。至于静摩擦力，它可以是零到最大静摩擦力之间的任何值，它与所加外力数值有关。

2）最大静摩擦力 F_{max} 与接触面的法向力 N 有关，而且

$$F_{max} = \mu N \tag{1.8.16}$$

其中，μ 是一个与 N 及接触面积无关的常数，称为**摩擦因数**，它只与两个接触面的性质（粗糙程度、质料、温度、滑润情况等）有关，无量纲。例如，精加工并上了油的金属表面互相之间的摩擦因数 $\mu = 0.10$，制动材料与铸铁之间的摩擦因数 $\mu = 0.4$。

3）当两接触面产生相对滑动时

$$F = \mu' N \tag{1.8.17}$$

其中，μ' 称为**动摩擦因数**。一般说来，$\mu' < \mu$（动摩擦因数比静摩擦因数小），但二者相差不大，在通常计算中可近似认为 $\mu' = \mu$。摩擦因数一般由实验测定。

滚动摩擦是与滑动摩擦物理本质完全不同的另一类摩擦，今天我们人类的生活中处处都充满轮子，正是充分利用了这一结果。

最后，我们要介绍一下所谓黏性阻力，当物体在黏性流体中运动时，它带动邻近的流体分子与它一起运动，因而受到流体对它的反作用，这种反作用叫做**黏性阻力**，其方向与运动方向相反，大小则与物体运动速度有关。如果以 $\boldsymbol{R}$ 表示这种阻力，则可近似地表示为

$$\boldsymbol{R} = -cv^{n-1}\boldsymbol{v} \tag{1.8.18}$$

其中，因子与流体的黏性及物体的几何形状有关，$\boldsymbol{v}$ 是物体运动的速度，n 是正整数，在低速时可取 $n=2$。

① 这里的摩擦力指滑动摩擦力。

1.9 运动微分方程的投影

1.9.1 运动微分方程的投影

牛顿第二定律

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},t) \tag{1.9.1}$$

或者

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\frac{1}{m}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},t) \tag{1.9.2}$$

称为质点的**运动微分方程**。上式是矢量方程，然而对于具体问题，往往需要在一定的坐标系中求解。兹将该方程在常用坐标系中的投影式分述如下：

1）直角坐标系　利用式（1.4.10）可得矢量方程（1.9.1）在直角坐标轴上的投影具有如下方程组的形式

$$\left.\begin{aligned}m\ddot{x}&=F_x\\ m\ddot{y}&=F_y\\ m\ddot{z}&=F_z\end{aligned}\right\} \tag{1.9.3}$$

2）柱面坐标系　利用式（1.4.24）可得矢量方程（1.9.1）在柱面坐标轴上投影形式为

$$\left.\begin{aligned}&m(\ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^2)=F_\rho\\ &m(\rho\ddot{\varphi}+2\dot{\rho}\dot{\varphi})=\frac{m}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho^2\dot{\varphi})=F_\varphi\\ &m\ddot{z}=F_z\end{aligned}\right\} \tag{1.9.4}$$

3）平面极坐标系　利用式（1.4.27c）可得矢量方程（1.9.1）在平面极坐标轴的投影式为

$$\left.\begin{aligned}&m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)=F_r\\ &m(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})=\frac{m}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\theta})=F_\theta\end{aligned}\right\} \tag{1.9.5}$$

4）球面坐标系　利用式（1.4.44b）或（1.4.44c）可得矢量方程（1.9.1）在球面坐标轴上的投影式为

$$\left.\begin{aligned}&m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2-r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)=F_r\\ &m(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}-r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta)=F_\theta\\ &m(r\ddot{\varphi}\sin\theta+2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta+2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta)=F_\varphi\end{aligned}\right\} \tag{1.9.6a}$$

或

$$\left.\begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta) &= F_r \\ m\left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\theta}) - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\right] &= F_\theta \\ m\left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\varphi}\sin^2\theta)\right] &= F_\varphi \end{aligned}\right\} \tag{1.9.6b}$$

5）自然坐标系　利用式(1.4.78)可得矢量方程(1.9.1)在自然轴上的投影式为

$$\left.\begin{aligned} m\dot{v} &= F_\tau \\ m\frac{v^2}{\rho} &= F_n \\ 0 &= F_b \end{aligned}\right\} \tag{1.9.7}$$

6）曲线坐标系　利用公式（1.4.48）可得运动方程在任何（包括非正交的）曲线坐标轴上的正交投影为

$$\frac{m}{2h_i}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial v^2}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial v^2}{\partial q_i}\right) = F_i \qquad (i = 1,2,3) \tag{1.9.8}$$

上面我们给出了在常用的几种坐标系中运动微分方程的投影形式。上列方程可以用来解决两类不同的动力学问题：第一类是根据给定质点的运动，即给定作为时间函数的质点坐标 $\boldsymbol{r}(t)$，求施于质点上的合力 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},t)$，此即所谓动力学的**正问题**；第二类是根据给定的合力 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},t)$，求作为时间函数的质点坐标 $\boldsymbol{r}(t)$，或者说质点运动规律，即动力学的**逆问题**。

动力学的正问题，实际上是运动学问题，它总可以用简单的微分方法来解决，结果得到在每一时刻施于质点上的合力，即确定的时间函数 $\boldsymbol{F}(t)$，将它与给定的函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 相比较，便可以显式表为质点的坐标、速度和时间的函数。在这种问题中，给定的是运动方程（1.9.1）的左方，而要求的是右方。可是在动力学的逆问题中，给定的是运动方程（1.9.1）的右方，要求的是左方。在逆问题中，应当认为方程（1.9.3）～（1.9.8）的左方是 $\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{v}$，t 的已知函数。逆问题原则上可归结为微分方程组（1.9.1）的积分，在已知函数 $\boldsymbol{F}$ 的一般形式下，这是极困难的，它的解析解往往是找不到的，甚至根本就做不到，只有在函数 $\boldsymbol{F}$ 的某些特殊形式下，解析解才是可能得到的。

由于对于大多数问题，要想写出解析表达式十分困难，甚至根本做不到。因此，在力学中发展了各种方法，比如在精确的表达式求不出来时就求近似表达式（近似法），在写不出解的解析表达式时就仅讨论解的某些可能性质（定性法）等等。特别是，因为所解的是力学问题，在许多地方有明显的物理意义，因而可以利用物理上的考虑与数学上的演算相互配合，使问题得到解决。

1.9.2 力的特殊形式

我们现在来考察使运动微分方程（1.9.1）易求积分的一些特殊形式的力的例子。

1. 力与时间和坐标均无关

如果在空间中每一点对质点都有一定力作用，则所有这些力的总和称为**力场**。

一般情况下，力场可逐点改变，同时与时间有关。

我们现在来研究质点在**均匀场**中运动这种最简单的情况。所谓**均匀场就是指力场在各处都大小相同、方向不变且与时间无关。**例如，在与地球半径比较起来很小的局部区域内，地球重力场就是这样的场。均匀电场也可以看成这样的场。

质点的运动微分方程是

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}$$

在我们所考察的情况下，$\boldsymbol{F}=\text{const}$。将上式写为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{v}=\frac{1}{m}\boldsymbol{F}\mathrm{d}t$$

对 t 积分一次得

$$\boldsymbol{v}=\frac{1}{m}\boldsymbol{F}t+\boldsymbol{c}_1$$

式中，$\boldsymbol{c}_1$ 是特定常矢量。将 $t=0$ 时 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0$ 代入，求得 $\boldsymbol{c}_1=\boldsymbol{v}_0$，于是得速度变化的规律为

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\frac{1}{m}\boldsymbol{F}t \tag{1.9.9}$$

因此，**在均匀场中速度是时间的线性函数**。对于 $\boldsymbol{v}$ 所得到的公式还表明，**质点是在力矢量 $\boldsymbol{F}$ 和初速度 $\boldsymbol{v}_0$ 所构成的平面内运动。**

再利用 $\boldsymbol{v}=\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t$ 代入并积分得

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{v}_0t+\frac{1}{2m}\boldsymbol{F}t^2+\boldsymbol{c}_2$$

其中，积分常矢量 $\boldsymbol{c}_2$ 由初始条件 $\boldsymbol{r}|_{t=0}=\boldsymbol{r}_0$ 求得，$\boldsymbol{c}_2=\boldsymbol{r}_0$。于是得

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{v}_0t+\frac{1}{2m}\boldsymbol{F}t^2+\boldsymbol{r}_0 \tag{1.9.10}$$

至此问题虽已解完，但我们并不容易从这个矢量式子中看出运动的轨道形状。下面用坐标表示方法求解。

前面我们已经得到结论，在均匀场中，质点是在力矢量和初速度所构成的平

面内运动。设平面的坐标轴为 x 和 y，且力 $\boldsymbol{F}$ 的方向沿着 y 轴。确定质点的速度 $\boldsymbol{v}$ 的方程（1.9.9）对其投影 v_x，v_y 分成两个方程

$$\left.\begin{aligned} v_y &= \frac{1}{m}Ft + v_{y_0} \\ v_x &= v_{x_0} \end{aligned}\right\} \tag{1.9.11a}$$

其中，v_{x_0} 和 v_{y_0} 分别为初速度在坐标轴上的投影。

众所周知，速度的投影等于质点相对应的坐标对时间的微商。于是，我们把上式写成

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{m}Ft + v_{y_0} \\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= v_{x_0} \end{aligned}\right\} \tag{1.9.11b}$$

将上式对时间 t 积分得

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{1}{2m}Ft^2 + v_{y_0}t + y_0 \\ x &= v_{x_0}t + x_0 \end{aligned}\right\} \tag{1.9.12}$$

其中，x_0 和 y_0 是坐标的初始值。这个方程式确定了质点运动的轨道。为简单计，选择当 v_y 为零时开始计算时间，故 $v_{y_0}=0$，并选择此时质点位于坐标原点，则 $x_0=y_0=0$。最后，因现在初速度和 v_{x_0} 一致，索性简记为 v_0，这样，我们得到

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{F}{2m}t^2 \\ x &= v_0 t \end{aligned}\right\} \tag{1.9.13}$$

消去 t 得

$$y = \frac{F}{2mv_0^2}x^2 \tag{1.9.14}$$

显然，上式为抛物线方程。因此，在均匀场中质点沿抛物线运动（见图 1.17）。

从上例中看出，直接由矢量形式的微分方程（1.9.1）求解是不方便的，因为即使是解求出来了，也不容易看出运动的规律，更何况在许多情况下并不容易求出其解。我们通常的方法是，先取定坐标系，将式（1.9.1）写成三个分量形式的微分方程，相应地把初始条件也写成三个分量形式，然后再去求解。在解决各种具体问题时，原则上是选用任意的坐标系都行，但是，选取合适的坐标系能使解题步骤简化。

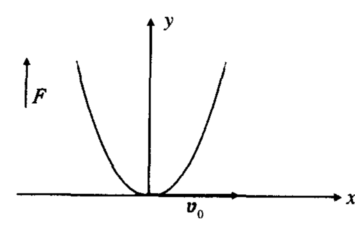


图 1.17 均匀场中质点沿抛物线运动

2. 力只依赖于时间

若力只依赖于时间

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(t) \tag{1.9.15}$$

则由运动方程

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}$$

经一次积分后即得三个独立的运动积分

$$\boldsymbol{v} = \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{F}\mathrm{d}t + \boldsymbol{c}_1 \tag{1.9.16}$$

很明显，常矢量 $\boldsymbol{c}_1$ 的物理意义是初速度 $\boldsymbol{v}_0$，这只要以 $t = t_0$ 代入上式即可看出

$$\boldsymbol{v}\big|_{t=t_0} = \boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{c}_1 \tag{1.9.17}$$

令

$$\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{F}\mathrm{d}t = \boldsymbol{\varphi}(t) \tag{1.9.18}$$

则式（1.9.16）可以写成

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{m}\boldsymbol{\varphi}(t) + \boldsymbol{v}_0 \tag{1.9.19}$$

再对时间积分一次得

$$\boldsymbol{r} = \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\varphi}(t)\mathrm{d}t + \boldsymbol{v}_0(t - t_0) + \boldsymbol{c}_2 \tag{1.9.20}$$

$\boldsymbol{c}_2$ 的物理意义也很明显，若令 $t = t_0$，从上式可以看出 $\boldsymbol{c}_2$ 就是初位置 $\boldsymbol{r}_0$

$$\boldsymbol{r}\big|_{t=t_0} = \boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{c}_2 \tag{1.9.21}$$

将式（1.9.21）代入式（1.9.20）得

$$\boldsymbol{r} = \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\varphi}(t)\mathrm{d}t + \boldsymbol{v}_0(t - t_0) + \boldsymbol{r}_0 \tag{1.9.22}$$

上式即为在力仅依赖于时间情况下运动微分方程的通解。自然，它包括力不依赖于时间的特殊情况。

3. 力只依赖于速度

对于力只依赖于速度我们仅限于讨论沿 x 轴做直线运动的特殊情况。在只有一个分量，即 $F_y = F_z = 0$，且初速度只有沿轴 x 的分量的条件下，会产生这种运动。在这种情况下，力的大小只是速率的函数，即

$$F = F(v) \tag{1.9.23}$$

例如，介质对物体的阻力是速度的函数。在我们所考察的情况下，运动方程为

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F(v) \tag{1.9.24}$$

这个方程可按两种方法进行积分:

a) 按 v 和 t 分离变量

$$m\frac{\mathrm{d}v}{F(v)}=\mathrm{d}t \tag{1.9.25}$$

从 t_0 到 t 进行积分，自然 v 的积分限是从 v_0 到 v

$$t-t_0=m\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{F(v)} \tag{1.9.26}$$

b) 按 v 和 x 分离变量

因为

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \tag{1.9.27}$$

所以式（1.9.25）可以改写为

$$mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=F(v) \tag{1.9.28}$$

分离变量

$$m\frac{v\mathrm{d}v}{F(v)}=\mathrm{d}x \tag{1.9.29}$$

进行积分，在 x_0 处速度为 v_0，所以

$$x-x_0=m\int_{v_0}^{v}\frac{v\mathrm{d}v}{F(v)} \tag{1.9.30}$$

对每一时间 t，由式（1.9.26）得一确定的速度值。而对每一个 $\boldsymbol{v}$ 由式（1.9.30）得一确定的 x 值，因而问题完全解决。

4. 力只依赖于坐标

只依赖于坐标的力是场力，如万有引力、静电场力、弹性力等，为简单计，我们这里只讨论一维情况，设

$$F=F(x) \tag{1.9.31}$$

运动方程为

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=F(x) \tag{1.9.32}$$

此类问题应对坐标积分求解。考虑到式（1.9.27），运动方程（1.9.32）可以写成

$$mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=F(x) \tag{1.9.33}$$

分离变量

$$mv\mathrm{d}v=F(x)\mathrm{d}x \tag{1.9.34}$$

对上式进行积分得

$$\frac{mv^2}{2} - c = \int_{x_0}^{x} F(x)\mathrm{d}x \equiv \varphi(x) \tag{1.9.35}$$

或者

$$v = \pm\sqrt{\frac{2\varphi(x) + c_1}{m}} \tag{1.9.36a}$$

在上式中，$v>0$ 时取正号，$v<0$ 时取负号，c_1 是积分常数。用 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ 替代 v

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \pm\sqrt{\frac{2\varphi(x) + c_1}{m}} \tag{1.9.36b}$$

将上式分离变量后再积分得

$$t - t_0 = \pm\int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(2\varphi(x) + c_1)/m}} \tag{1.9.37}$$

然后从积分结果中反解出 $x = x(t)$，就得到了质点的运动规律。

1.9.3 例题

前面的阐述有些抽象，下举几个解运动微分方程的具体例子。

例 1 简谐振子

我们考虑一个被约束在一维情况下的振动。假设粒子有一个稳定平衡位置。我们选这一位置为原点。如果粒子从原点离开（在任意方向），有某一力将驱使粒子回到初始位置，这个力一般是位移，也许还有粒子的速度，甚至还有位置坐标的某种高阶时间导数的某种复杂函数。我们这里只考虑恢复力 F 仅是位移的函数：$F = F(x)$。

我们假设描述恢复力的函数 $F = F(x)$ 具有任意阶的连续导数，则函数可以按照泰勒级数展开

$$F = F(x) = F_0 + x\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}\right)_0 + \frac{1}{2}x^2\left(\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}x^2}\right)_0 + \cdots \tag{1}$$

式中，F_0 是 $F(x)$ 在原点（$x=0$）的值，而（$\mathrm{d}^nF/\mathrm{d}x^n$）是在原点的 n 阶导数。由于原点定义在平衡点，F_0 必然是零。如果我们只限于粒子的位移足够小的情况，我们可以忽略 x^2 项和 x 的高阶项。因此，我们得到一个近似关系式

$$F(x) = -kx \tag{2}$$

式中，$k \equiv -(\mathrm{d}F/\mathrm{d}x)$，叫做恢复系数。因为恢复力总是指向平衡位置（原点），所以 $(\mathrm{d}F/\mathrm{d}x)_0$ 是负值，因而 k 是个正常数。因为 $F(x)$ 中只出现位移的一次方，所以在这种近似中恢复力是**线性力**。

能够用方程（2）描述的系统叫做遵守胡克定律（Hookes law）的系统。有一类物理过程，包括弹性形变在内都可以应用胡克定律处理。但是我们要强调

指出，这种计算仅仅是近似的，因为自然界中任何真实力都会比单纯由胡克定律描述的力复杂。要记住，线性力仅是一个常用的近似，它只限于小振幅才是正确的。

质点受到形为式（2）的力，即和它的位移成正比的恢复力时所产生的运动，称为**简谐振动**，这样的振动系统叫**简谐振子**。

简谐振子典型的力学模型是所谓弹簧-质量系统。例如，取一不考虑质量的弹簧，放在水平位置，一端固定，另一端系一质量为 m 的质点，就是这样的系统。设取质点平衡位置为坐标原点 O，沿水平轴拉伸弹簧使质点产生微小位移 x，质点所受的弹性恢复力可以写为

$$\boldsymbol{F}(x) = -kx\boldsymbol{i}$$

这里，我们给出的模型是符合胡克定律的真实弹性力，对于其他虽非弹性但符合这个条件的力统称为**准弹性力**。就位移而言，既可以是线位移，也可以是角位移。

质点在准弹性力作用下的运动微分方程为

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx \tag{3}$$

令 $\omega_0^2 = k/m$，可将式（3）写成

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{4}$$

该方程的通解是

$$x = c_1\sin\omega_0 t + c_2\cos\omega_0 t \tag{5}$$

其中，c_1 和 c_2 为待定的积分常数，取决于质点运动的初始条件。设 $t=0$ 时，$x = x_0$，$\dot{x} = v_0$，则不难求得 $c_1 = v_0/\omega_0$，$c_2 = x_0$，于是

$$x = \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t + x_0\cos\omega_0 t \tag{6}$$

今引入另外两个常数：振辐 A 和初位相 θ，使

$$x_0 = A\cos\theta$$

$$\frac{v_0}{\omega_0} = A\sin\theta$$

或者从上二式解出 A 和 θ

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2} \tag{7}$$

$$\theta = \arctan\frac{v_0}{\omega_0 x_0} \tag{8}$$

于是式（6）还可以写为另一较为简单的形式

$$x = A\cos(\omega_0 t - \theta) \tag{9}$$

用公式（9）描述的运动显然是周期性的，因为时间是通过周期函数进入式（9）的，意思就是说，有这样一个时间的间隔 T，它使得

$$\cos(\omega_0 t-\theta)=\cos[\omega_0(t+T)-\theta]$$

由此推得

$$\omega_0 T=2\pi, \qquad \omega_0=\frac{2\pi}{T}$$

ω_0 称为**固有角频率**，而周期 T 的倒数称为**线频率**，简称**频率**，记作 ν（有时也记作 f）

$$\nu=\frac{1}{T}=\frac{\omega_0}{2\pi}$$

因 $\omega_0=\sqrt{k/m}$，所以上式又可写成

$$\nu=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

简谐振子无论在经典物理或量子物理中都有基本的重要意义。分子中原子的微小振动，原子核表面的振动等都是例子。在平衡位置附近做热运动的晶格粒子也是简谐振子。以后我们还会在不同的场合，从不同的角度仔细讨论与其有关的问题。

例 2 带电粒子在匀强电场中的运动

有一质量为 m 的带电粒子，电荷为 q，在恒定的均匀电场中沿着场强 $\boldsymbol{E}$ 做直线运动。根据式（1.8.1）有

$$m\boldsymbol{a}=q\boldsymbol{E}$$

或者，粒子运动微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\frac{q}{m}\boldsymbol{E} \tag{1}$$

上式中，q/m 是带电粒子的荷质比，是一个常量。对式（1）进行积分得

$$\boldsymbol{v}(t)=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{q\boldsymbol{E}}{m}t+\boldsymbol{v}_0 \tag{2}$$

再积分一次得

$$\boldsymbol{r}(t)=\frac{q\boldsymbol{E}}{2m}t^2+\boldsymbol{v}_0 t+\boldsymbol{r}_0 \tag{3}$$

这里，$\boldsymbol{r}_0$ 与 $\boldsymbol{v}_0$ 是 t_0 时位置矢量和速度矢量。

例如，一个质子被电场 $E_x=1\text{V/cm}$ 由静止开始加速，经过 1ns（10^{-9}s）后的速度很容易由式（2）求得。因 $\boldsymbol{v}=0$，所以质子沿 E_x 方向做匀加速直线运动，式（2）简化为

$$v_x(t)=\frac{e}{m}E_x t, \qquad v_y=v_z=0$$

质子质量 $m=1.6\times10^{-24}$g，$e=4.8\times10^{-10}$esu 电量，故得 10^{-9}s 末的速度为

$$v_x \approx \frac{4.8\times10^{-10}\times1\times10^{-9}}{2\times10^{-24}} \approx 2.4\times10^5 \ (\text{cm/s})$$

由于我们仅想估算一下数量级，计算中取 2×10^{-24} 作为质子质量。

如用国际单位制

$$E_x = 3\times10^4 \text{V/m}$$

$$e = 1.6\times10^{-19}\text{C}$$

$$v_x \approx \frac{(1.6\times10^{-19})\ (3\times10^4)\ (1\times10^{-9})}{2\times10^{-27}}$$

$$\approx 2.4\times10^3 \text{m/s}$$

顺便指出，在理论物理学中，往往为了避免在推导公式中出现许多常数带来的不便，某些非国际单位制，如厘米－克－秒单位制，高斯单位制仍然常用。

若所考虑的带电粒子是电子，在沿 x 轴负方向的电场 $E_x = 1$ V/cm 中加速，问经过 1cm 后它的末速度是多少?

对于电荷为 $-e$，质量为 $m = 9.1\times10^{-28}$g 的电子，我们由式（2）得

$$v_x(t) = -\frac{e}{m}E_x t$$

$$x(t) = -\frac{e}{2m}E_x t^2$$

下面我们来消去 t，以解出用 x 表示的 v_x。取 v_x^2，重新整理各因子，不难得出

$$v_x^2 = \left(\frac{e}{m}E_x t\right)^2 = \left(\frac{2e}{m}E_x\right)\left(\frac{e}{2m}E_x t^2\right)$$

$$= -\frac{2e}{m}E_x x$$

$$\approx \frac{(-2\times4.8\times10^{-10})\ (-1)}{9.1\times10^{-28}}$$

$$\approx 10^{18}\ (\text{cm}^2/\text{s}^2)$$

因此，末速度近似为

$$v_x = 10^9 \text{cm/s} = 10^7 \text{m/s}$$

这是光速度的 1/30，还是足够小的，因此不需要考虑相对论效应。

例 3 在振荡电场力作用下的电子运动

作为力是时间函数 $F = F(t)$ 的一个简单实例，讨论一个电子，受沿着 x 轴振荡电场力的作用，场强为余弦函数

$$E_x = E_0\cos(\omega t + \theta) \tag{1}$$

则作用于电子的场力为

$$F(t) = -eE_x = -eE_0\cos(\omega t + \theta) \tag{2}$$

式中，$-e$ 为电子所带电荷，E_0 为电场强度最大值，ω 为角频率，θ 为初相角，

e，E，ω 和 θ 都是常数。根据牛顿运动定律，电子运动的微分方程为

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-eE_0\cos(\omega t+\theta) \tag{3}$$

设运动的初始条件为 $t=0$ 时，$v=v_0$，对上面的方程进行积分得

$$v=v_0+\frac{eE_0\sin\theta}{m\omega}-\frac{eE_0}{m\omega}\sin(\omega t+\theta) \tag{4}$$

再积分，设 $t=0$，$x=x_0$，得

$$x=x_0-\frac{eE_0\cos\theta}{m\omega^2}+\left(v_0+\frac{eE_0}{m\omega}\sin\theta\right)t+\frac{eE_0}{m\omega^2}\cos(\omega t+\theta) \tag{5}$$

如果电子起始时，在 $x_0=0$ 处是静止的，则

$$x=-\frac{eE_0\cos\theta}{m\omega^2}+\left(\frac{eE_0}{m\omega}\sin\theta\right)t+\frac{eE_0}{m\omega^2}\cos(\omega t+\theta) \tag{6}$$

例 4 带电粒子在均匀恒定磁场中的运动

若带电粒子之间或者它们相对于观察者都是不动的，则作用在电荷为 q 的粒子上的力是所谓静电力，$\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{E}$，也就是说我们考虑的是静止状态。但是，如果 q 相对于观察者是运动的，实验表明，在垂直于它速度的方向上可能会出现一个附加的力，这就是磁力。存在磁力的区域称为**磁场**。磁力的公式为

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{m}}=\frac{q}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} \tag{1a}$$

式中，c 是真空中的光速，$\boldsymbol{v}$ 是带电粒子的速度，$\boldsymbol{B}$ 为磁感应强度。式中各量均采用高斯单位制，F 用 dyn，q 用 C，B 为 G。如果用国际单位制（SI），则

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{m}}=q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} \tag{1b}$$

式中，q 单位用 C，v 用 m/s，F 用 N。这个方程规定了 B 的量纲为 $[\mathrm{N}][\mathrm{C}]^{-1}[\mathrm{m}]^{-1}$。近些年来这个单位有了一个专门名称——特斯拉（T），以前它是用 $\mathrm{Wb/m^2}$ 来表示的

$$1\mathrm{T}=10^4\ \mathrm{G}$$

作用在运动的带电粒子上的总力是静电力和磁力的矢量和，称为**洛伦兹力**（这个名称有时也专指磁力）。由式（1a）和（1b）得到在高斯单位制中洛伦兹力的表达式为

$$\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{E}+\frac{q}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} \tag{2a}$$

在国际单位中为

$$\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{E}+q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} \tag{2b}$$

根据式（1a），一个质量为 m，电量为 q 的带电粒子在恒定磁场 $\boldsymbol{B}$ 中的运动方程为

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\frac{q}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} \tag{3}$$

设磁场方向沿 z 轴

$$\boldsymbol{B}=B\boldsymbol{k}$$

根据矢积公式，($\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$) 在直角坐标轴的投影为

$$(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})_x=v_yB,\qquad(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})_y=-v_xB,\qquad(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})_z=0 \tag{4}$$

由此可把式 (3) 写成分量形式

$$v_x=\frac{q}{mc}v_yB,\qquad\dot{v}_y=\frac{q}{mc}v_xB,\qquad\dot{v}_z=0 \tag{5}$$

为求方程组 (5) 的解，我们分别以 v_x 和 v_y 乘方程 (5) 的第一式和第二式，然后相加得

$$v_x\dot{v}_x+v_y\dot{v}_y=0,\qquad\dot{v}_z=0$$

这组微分方程的解是

$$v_x=v_1\sin\omega t,\qquad v_y=v_1\cos\omega t,\qquad v_z=c \tag{6}$$

式中，c 表示常数。这种运动在 xy 平面上的投影是一个圆。任何 v_1 值都满足前面两个方程，不过我们将看到，v_1 确定了圆轨道的半径，这个半径将在下面计算出来。对式 (6) 的 v_x 和 v_y 微分并和式 (5) 对照可得

$$\omega v_1\cos\omega t=\frac{qB}{mc}v_1\cos\omega t$$

$$-\omega v_1\sin\omega t=-\frac{qB}{mc}v_1\sin\omega t$$

可见上面两个方程要成立，只有

$$\omega=\frac{qB}{mc}\equiv\omega_c \tag{7}$$

这个关系式定义了**回旋频率** ω_c，它就是粒子在磁场中做圆周运动的频率。通过 ω_c 和 v_1 可以求出粒子在 xy 平面内做圆周运动轨道的半径

$$r_c=\frac{v_1}{\omega_c}=\frac{mcv_1}{qB}$$

粒子的完整轨迹是怎样的呢？我们已经看到，就在 x，y 方向的运动来说，粒子的轨迹是圆形；而在 z 方向，由于没有分量，它将以恒定速率 v_z 径直前进 (当然 v_z 也可以是零)。对式 (6) 积分，我们得到带电粒子的轨道

$$\left.\begin{aligned}x&=x_0+\frac{v_1}{\omega_c}-\frac{v_1}{\omega_c}\cos\omega_c t\\y&=y_0+\frac{v_1}{\omega_c}\sin\omega_c t\\z&=z_0+v_zt\end{aligned}\right\} \tag{8a}$$

上式也可以写成

$$\left.\begin{aligned}&x-\left(x_0+\frac{v_1}{\omega_c}\right)=-\frac{v_1}{\omega_c}\cos\omega_c t\\&y-y_0=\frac{v_1}{\omega_c}\sin\omega_c t\\&z-z_0=v_z t\end{aligned}\right\}\tag{8b}$$

式（8b）表明，一个带电粒子在磁场内的轨迹是：在 xy 平面上投影的位置以角速度 ω_c 沿着圆心位于 $\left(x_0+\frac{v_1}{\omega},\ y_0\right)$、半径为 $r_c=\frac{v_1}{\omega_c}=\frac{mcv_1}{qB}$ 做圆周运动，同时在这个匀速圆周运动上还叠加了一个当 $t=0$ 时从 $z=z_0$ 处开始的以速率 v_z 沿 z 轴方向的匀速移动。因此，完整的运动是一条螺旋线，它的轴与磁场磁量 $\boldsymbol{B}$ 平行，在我们讨论的情况下也是沿着 z 轴。图 1.18 中画出了这种轨迹，半径 r_c 常称为**回旋半径**。

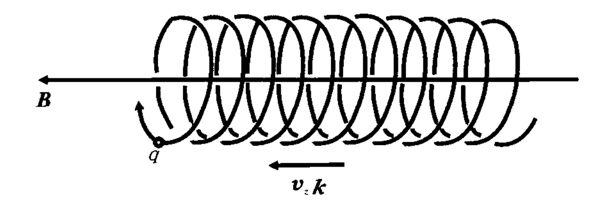


图 1.18　正电荷 q 在均匀磁场中描出一条等螺距螺旋线

我们还注意到，磁感应强度与轨道半径的乘积为

$$Br_c=\frac{c}{q}mv_1$$

这是一个重要的关系式。在相对论的领域中，这个关系式也是正确的。不论对高速的或低速的带电粒子，都能用这个关系式测定它的动量。例如，在高能物理中对带电粒子进行测量的多种仪器都是根据这个原理制成的。

例 5　阻尼振动

简谐振子所代表的振动叫做**自由振动**。这个振动一旦建立，将永远不会停止。当然，这只是真实物理情况的一个简化，真实的情况中必然有耗散力和摩擦力，而使振动最终停止。分析这种情况下的运动可以把代表阻尼力的项合并到微分方程中去。一般情况下，阻尼力既可以与位移有关，也可以是速度，或许还是位移对时间高阶导数的函数，要把这些情况全都考虑进去，看来是不容易的。像经常做的那样，假定阻尼力是速度的线性函数：$\boldsymbol{F}_d=\alpha\boldsymbol{v}$。我们将只考虑一维阻尼振动，所以可以用 $-b\dot{x}$ 代表阻尼项。参数 b 必须是正的，以使该力的确代表**阻力**。

这样，如果质量为 m 的粒子在恢复力 $-kx$ 和阻力 $-b\dot{x}$ 的联合作用下运动，描述运动的微分方程是

$$m\ddot{x}+b\dot{x}+kx=0 \tag{1}$$

我们可以把上式写为

$$m\ddot{x}+2\beta\dot{x}+\omega_0^2x=0 \tag{2}$$

这里，$\beta\equiv b/2m$ 是阻尼因子，$\omega_0=\sqrt{k/m}$ 是无阻尼时的**特征频率**。这是一个二阶线性齐次方程，辅助方程的根是

$$x(t)=\mathrm{e}^{-\beta t}[A_1\exp(\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}t)+A_2\exp(-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}t)] \tag{3}$$

存在着我们感兴趣的普遍情况：(a) 欠阻尼：$\omega_0^2>\beta^2$；(b) 临界阻尼：$\omega_0^2=\beta^2$；(c) 过阻尼：$\omega_0^2<\beta^2$。

我们将看到，只有欠阻尼做振动。下面仅就这三种情况中的欠阻尼运动加以讨论。对于这种情况，定义

$$\omega_1^2\equiv\omega_0^2-\beta^2 \tag{4}$$

比较方便，此处 $\omega_1^2>0$，那么，式（4）中里括号中的指数就是虚数，其解变为

$$x(t)=\mathrm{e}^{-\beta t}[A_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_1t}+A_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_1t}] \tag{5}$$

该式可以写作

$$x(t)=A\mathrm{e}^{-\beta t}\cos(\omega_1t-\delta) \tag{6}$$

我们把量 ω_1 叫做阻尼振动的**频率**。严格来说，当有阻尼存在时，我们不能定义频率，因为运动是非周期的，也就是说，振子永远不能以同样的速度两次通过给定的点。设阻尼很小，则

$$\omega_1=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}\approx\omega_0$$

虽然为了简便我们仍将 ω_1 称作阻尼振子的频率，但其意义并不精确，除非 $\beta=0$。

1.10 牛顿第二定律（Ⅱ）

1.10.1 冲量定理

牛顿第二定律

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(m\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F} \tag{1.10.1}$$

也可以改写成

$$\mathrm{d}\boldsymbol{p}=\mathrm{d}(m\boldsymbol{v})=\boldsymbol{F}\mathrm{d}t \tag{1.10.2}$$

上式的右端，力与时间间隔的乘积，叫做**力的冲量**。上式表明，**质点动量的元增**

量等于力的元冲量。对式（1.10.2）积分得

$$\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_0=m\boldsymbol{v}-m\boldsymbol{v}_0=\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{F}\mathrm{d}t \tag{1.10.3}$$

即有限时间 $t-t_0$ 内质点动量变化等于在这一时间内力的冲量。通常称式（1.10.3）为**冲量定理**。它是牛顿第二定律的积分形式，或者说是动量定理的积分形式，而式（1.10.1）就是其微分形式。

从式（1.10.1）可以看出，当 $\boldsymbol{F}=0$ 时

$$\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}=m\boldsymbol{v}_0=\text{const} \tag{1.10.4}$$

即质点在不受力作用时，其动量保持不变，亦即质点在做惯性运动（等速直线运动）。这就是早已熟知的动量守恒定律。

有时虽然 $\boldsymbol{F}\neq 0$，但力 $\boldsymbol{F}$ 在某一坐标轴的投影为零。那么，尽管总动量 $\boldsymbol{p}$ 不守恒，但在该轴上的投影却为一个常数。例如，在重力场中，质点在重力作用下向下运动，如取 z 轴铅直向上，则

$$F_x=0,\qquad F_y=0,\qquad F_z=-mg \tag{1.10.5}$$

根据前面的讨论，显然动量（或速度）在 x 及 y 两轴上的投影为常数。

牛顿三定律的核心是第二定律，其中包含许多丰富的物理内容。将其形式稍加改变，根据形式的不同，也就给取了不同的名称，以强调不同的方面，如运动（微分）方程，动量定理，冲量定理等，实际上都是指牛顿第二定律。

1.10.2 内力和外力

现在我们来考察质点系的运动。设质点系由 N 个质点组成，以 m_α 和 r_α 分别表示第 α 个质点的质量和位矢。依据牛顿第二定律建立该质点的运动方程

$$m_\alpha\ddot{\boldsymbol{r}}_\alpha=\boldsymbol{F}_\alpha \tag{1.10.6}$$

对质点系的每一个质点都有这样的方程。式中 $\boldsymbol{F}_\alpha$ 是作用在第 α 个质点上的合力。处理质点系的运动时，习惯上把作用力区分为内力和外力，**内力**是指系统内质点间的相互作用；**外力**是指系统内的质点与不包括在系统内的外界物体间的相互作用。于是，把 $\boldsymbol{F}_\alpha$ 分为两部分

$$\boldsymbol{F}_\alpha=\boldsymbol{F}_\alpha{}^{(\mathrm{e})}+\boldsymbol{F}_\alpha{}^{(\mathrm{i})} \tag{1.10.7}$$

式中，$\boldsymbol{F}_\alpha^{(\mathrm{e})}$ 是作用在第 α 个质点上外力的合力，$\boldsymbol{F}_\alpha^{(\mathrm{i})}$ 是作用在第 α 个质点上内力的合力。$\boldsymbol{F}_\alpha^{(\mathrm{i})}$ 为所有单个力 $\boldsymbol{F}_{\alpha\beta}$ 的矢量和

$$\boldsymbol{F}_\alpha^{(\mathrm{i})}=\sum_\beta\boldsymbol{F}_{\alpha\beta} \tag{1.10.8}$$

其中，$\boldsymbol{F}_{\alpha\beta}$ 代表第 β 个质点作用在第 α 个质点上的力。而且，根据牛顿第三定律知

$$\boldsymbol{F}_{\alpha\beta}=-\boldsymbol{F}_{\beta\alpha} \tag{1.10.9}$$

牛顿第二定律对第 α 个质点可以写作

$$\dot{\boldsymbol{p}}_\alpha = m_\alpha \ddot{\boldsymbol{r}}_\alpha = \boldsymbol{F}_\alpha^{(e)} + \boldsymbol{F}_\alpha^{(i)} \tag{1.10.10}$$

或者

$$\frac{d^2}{dt^2}(m_\alpha \boldsymbol{r}_\alpha) = \boldsymbol{F}_\alpha^{(e)} + \sum_\beta \boldsymbol{F}_{\alpha\beta} \tag{1.10.11}$$

1.10.3 质点系动量定理

根据式（1.5.2），质点系的总动量就是系统内所有质点动量的矢量和

$$\boldsymbol{P} = \sum_\alpha \boldsymbol{p}_\alpha = \sum_\alpha m_\alpha \boldsymbol{v}_\alpha \tag{1.10.12}$$

现在我们来求 $\boldsymbol{P}$ 随时间变化的规律。将式（1.10.12）对时间求微商

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = \sum_\alpha \dot{\boldsymbol{p}}_\alpha = \sum_\alpha \boldsymbol{F}_\alpha = \sum_\alpha \boldsymbol{F}_\alpha^{(e)} + \boldsymbol{F}_\alpha^{(i)} \tag{1.10.13}$$

考虑到式（1.10.8），上式的第二项可以写为

$$\sum_\alpha \boldsymbol{F}_\alpha^{(i)} = \sum_\alpha \sum_\beta \boldsymbol{F}_{\alpha\beta} \qquad (\alpha \neq \beta) \tag{1.10.14}$$

由于求和与下标无关，所以改换下标的符号不影响求和的值

$$\sum_\alpha \boldsymbol{F}_\alpha^{(i)} = \sum_\beta \boldsymbol{F}_\beta^{(i)} = \sum_\beta \sum_\alpha \boldsymbol{F}_{\beta\alpha} \tag{1.10.15}$$

式中的指标 α 或β，在其求和不依赖于字母这种意义上叫做**哑指标**。这里在右端求和项中没有 $\alpha = \beta$ 这一项，因为 $\boldsymbol{F}_{\alpha\alpha} \equiv 0$，考虑到式（1.10.9），即

$$\boldsymbol{F}_{\beta\alpha} = -\boldsymbol{F}_{\alpha\beta}$$

于是，式（1.10.15）可以写成

$$\sum_\alpha \boldsymbol{F}_\alpha{}^{(i)} = -\sum_\alpha \sum_\beta \boldsymbol{F}_{\alpha\beta} \tag{1.10.16}$$

式（1.10.16）与（1.10.15）相比较，我们看到两式左方相等，而右方差一负号，因此，只有

$$\sum_\alpha \boldsymbol{F}_\alpha^{(i)} = 0 \tag{1.10.17}$$

才有可能。这就是说

$$\sum_\alpha \boldsymbol{F}_\alpha = \sum_\alpha \boldsymbol{F}_\alpha^{(e)} \tag{1.10.18}$$

因而

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = \boldsymbol{F}^{(e)} \tag{1.10.19}$$

其中

$$\boldsymbol{F}^{(e)} = \sum_\alpha \boldsymbol{F}_\alpha^{(e)} \tag{1.10.20}$$

即质点系总动量对时间的微商等于作用在系统上所有外力之和，这就是**质点系的动量定理**。

1.10.4 质心运动定理

这是质点系动量定理的另一种表述。根据式（1.7.9），质点系质心的位矢为

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{c}} = \frac{1}{M}\sum_{\alpha} m_{\alpha}\boldsymbol{r}_{\alpha} \tag{1.10.21}$$

其 M 为质点系的质量，它是质点系所有质量之和

$$M = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \tag{1.10.22}$$

将式（1.10.21）对时间求微商得

$$M\boldsymbol{v}_{\mathrm{c}} = \sum_{\alpha} m_{\alpha}\boldsymbol{v}_{\alpha} = \boldsymbol{P} \tag{1.10.23}$$

即质点系的总动量等于系统的总质量乘以质心的速度。将式（1.10.23）再对时间求微商得

$$M\boldsymbol{a}_{\mathrm{c}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t} \tag{1.10.24}$$

或者

$$M\boldsymbol{a}_{\mathrm{c}} = \boldsymbol{F}^{(\mathrm{e})} \tag{1.10.25}$$

上式表明，**系统质心的运动，犹如一个单个质点，该质点的质量等于系统的总质量，且作用在其上的力等于作用在系统上的总合外力，与内力的性质无关**（只要它们遵从牛顿第三定律 $\boldsymbol{F}_{\alpha\beta} = -\boldsymbol{F}_{\beta\alpha}$）。

事实上，我们把真实物体简化为一个质点，也就是考虑真实物体质心的运动，而忽略了绕其质心的转动。

1.10.5 质点系动量守恒定律

在 1.5 节我们已经给出了封闭系统的动量守恒定律的普遍关系，1.8 节又进一步进行了讨论，现在再从质心运动的视角来讨论这个普遍定律。

对于封闭系统

$$\boldsymbol{F}^{(\mathrm{e})} = 0 \tag{1.10.26}$$

依据式（1.10.19），则有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t} = 0$$

所以

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_0 \text{（常矢量）} \tag{1.10.27}$$

即封闭系统的总动量保持不变。利用式（1.10.23）还可以把这个运动积分写成另一种形式

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{c}} = \boldsymbol{v}_{\mathrm{c}0} \tag{1.10.28}$$

即封闭系统质心做等速直线运动或处于静止状态。这是质点系动量守恒定律的又一种表达形式。但应指出，此时系统中质点还可以相对于质心做复杂运动。

将式（1.10.28）再对时间积分一次得

$$\boldsymbol{r}_c = \boldsymbol{v}_{c0}(t - t_0) + \boldsymbol{r}_{c0} \tag{1.10.29}$$

其中，$\boldsymbol{r}_{c0}$为 $t = t_0$ 时系统质心的初位矢。

最后，我们要问，根据式（1.10.25）是否可以做出这样的结论：内力不可能影响质心的速度？回答是，这个结论只有对封闭系统，即没有外力作用的情形是对的。对于依赖于 $\boldsymbol{r}_\alpha$，$\dot{\boldsymbol{r}}_\alpha$ 的外力存在时，即在

$$\boldsymbol{F}^{(e)} = \boldsymbol{F}^{(e)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_\alpha, \cdots, \boldsymbol{r}_N; \dot{\boldsymbol{r}}_1, \dot{\boldsymbol{r}}_2, \cdots, \dot{\boldsymbol{r}}_\alpha, \cdots, \dot{\boldsymbol{r}}_N; t) \tag{1.10.30}$$

的一般情形下，内力可以直接改变 $\boldsymbol{r}_\alpha$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}_\alpha$——$\boldsymbol{F}^{(e)}$的宗量，也就是改变了 $\boldsymbol{F}^{(e)}$，并且在 $\boldsymbol{F}^{(e)} \neq 0$ 的时候，影响质心的运动。

1.10.6 变质量物体的运动

尽管在 1.5 节讨论反冲运动也涉及变质量物体的运动，但前面所讨论的主要还是物体质量固定时的运动规律，在本小节中我们将寻求物体的质量按一定规律变化（减少或增加）时的动力学方程，即变质量物体的运动方程。

变质量物体的运动是人们在生产技术实践中常遇到的一种运动。如，靠向外喷射气体而飞行的火箭，投掷载荷的飞机或气球，因凝结而不断增加质量的雨滴，吸入气体同时又喷出气体的喷气式飞机等物体的运动都是变质量物体的运动。对于变质量物体的运动，我们可以把质量不断变化着的物体和由它放射出来的物体（或增加到它上面的物体）看成一个质点系，那么就和不变质量的质点系一样了。

设一物体在 t 时刻的质量为m，它的速度是 $\boldsymbol{v}$，同时一微小质量 Δm 以速度 $\boldsymbol{u}$ 运动，并在 $t + \Delta t$ 时间间隔内与 m 相合并，合并以后的共同速度是 $\boldsymbol{v} + \Delta \boldsymbol{v}$，该质点系在 t 时刻的动量为

$$\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{v} + \Delta m\boldsymbol{u} \tag{1.10.31}$$

在 $t + \Delta t$ 时刻质点系的动量为

$$\boldsymbol{P}' = (m + \Delta m)(\boldsymbol{v} + \Delta \boldsymbol{v}) \tag{1.10.32}$$

如果作用在 m 及 Δm 上的合外力为$\boldsymbol{F}$，则由质点系动量定理

$$\boldsymbol{P}' - \boldsymbol{P} = \boldsymbol{F}\Delta t$$

或者

$$(m + \Delta m)(\boldsymbol{v} + \Delta \boldsymbol{v}) - m\boldsymbol{v} - \Delta m\boldsymbol{u} = \boldsymbol{F}\Delta t \tag{1.10.33}$$

内力及约束力恒相等相反因而消去。

略去式（1.10.33）中的二阶微量 $\Delta m \Delta \boldsymbol{v}$，式两端同除以 Δt，并使 $\Delta t \to 0$，得变质量物体的动力学方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\boldsymbol{v})-\boldsymbol{u}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F} \tag{1.10.34}$$

式中，$\boldsymbol{u}$ 是代表微质量 Δm 来与 m 合并以前或自 m 分离出后一刹那的速度，$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$为质量的时间变化率（可正可负），而 $\boldsymbol{F}$ 则为作用在系统上的合外力，例如万有引力和空气阻力。上式中如果 $\boldsymbol{u}=0$，则简化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\boldsymbol{v})=\boldsymbol{F} \tag{1.10.35}$$

如果 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 相等，则式（1.10.34）简化为

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F} \tag{1.10.36}$$

上式看来与质量为定值的运动微分方程在形式上没有什么区别，但实际上并不相同，这里 m 一般是时间 t 的函数。

如设

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{u}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \tag{1.10.37}$$

则式（1.10.34）可改写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\boldsymbol{v})=\boldsymbol{F}+\boldsymbol{A} \tag{1.10.38}$$

这是变质量物体运动微分方程的另一种书写形式，其中 $\boldsymbol{A}$ 称为**反推力**。

反推力究竟是推动力还是制动力，要由 $\boldsymbol{u}$ 的方向和$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$的正负来确定。下面举两个简单例子来说明。

火箭在飞行中不断向后喷射燃气，$\boldsymbol{u}$ 是喷射出来的燃气相对于火箭的相对速度，它的方向与火箭前进的方向相反。设 $\boldsymbol{e}_\tau$ 为火箭前进方向上的单位矢量，则 $\boldsymbol{A}=-u\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\tau$，但因火箭的质量在不断减少，$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$为负，因而 $\boldsymbol{A}$ 的方向与 $\boldsymbol{e}_\tau$ 的方向一致，也就是和火箭的前进方向一致，所以 $\boldsymbol{A}$ 是使火箭加速前进的动力。

当我们把放置在地上的链条的一端向上提起时，其运动部分的质量是在不断增大。假设链条在某时刻 t 的运动速度为 $\boldsymbol{v}$，在 $\mathrm{d}t$ 时间内提起部分的质量为 $\mathrm{d}m$，因 $\mathrm{d}m$ 在被提起前是静止的，它相对于运动部分的链条的速度为 $-\boldsymbol{v}$，则 $\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{v}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$；又因链条运动部分的质量在不断增加，$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$为正，故 $\boldsymbol{A}$ 的方向与链条运动方向相反，此对反推力表现为制动力。

例 雨滴通过饱和大气层下落时，水蒸气附在它的表面凝结为水，从而增加雨滴的质量。设雨滴质量的增加与其表面积成正比，下落开始时初速度 $v_0=0$，半径为 $r_0=a$，求雨滴速度与时间的关系。

解 设在 t 时刻，雨滴的半径为

$$r=a+\lambda t \tag{1}$$

其中，a 为开始（$t=0$）时的雨滴半径，λ 为单位时间内雨滴半径的增量。令 m 表示 t 时刻的雨滴质量，则按题意有

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=k\cdot 4\pi\ (a+\lambda t)^2 \tag{2}$$

式中，k 为比例常数，积分式（2）得

$$m=\frac{4\pi}{3\lambda}k(a+\lambda t)^3 \tag{3}$$

雨滴运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mv)\ =mg \tag{4}$$

式中，v 和 g 分别为雨滴下落的速度和重力加速度，将式（3）代入式（4）并积分得

$$v(a+\lambda t)^3=\frac{g}{4\lambda}(a+\lambda t)^4+c \tag{5}$$

式中，c 为积分常数，把初始条件 $t=0$ 时，$v=0$ 代入式（5），得

$$c=-\frac{ga^4}{4\lambda} \tag{6}$$

将式（6）代入式（5），得雨滴下落的速度为

$$\begin{aligned} v&=-\frac{ga^4}{4\lambda(a+\lambda t)^3}+\frac{g(a+\lambda t)}{4\lambda}\\ &=\frac{g}{4\lambda}\left[a+\lambda t-\frac{a^4}{(a+\lambda t)^3}\right] \end{aligned} \tag{7}$$

1.11　保守力场

1.11.1　功

我们现在来考察在某个力场 $\boldsymbol{F}$（譬如引力场，电场等）中质点的运动。如果在力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下，质点运动无限小的弧元 $\mathrm{d}s$，则量

$$\mathrm{d}W=F\mathrm{d}s\cos\theta \tag{1.11.1}$$

叫做力 $\boldsymbol{F}$ 在弧元 $\mathrm{d}s$ 上所做的**元功**。令 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 表示质点运动轨道切线方向的元矢量，式中 θ 为力矢量 $\boldsymbol{F}$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 间的夹角。功的正负由 $\cos\theta$ 确定。大家知道，两个矢量的绝对值与其夹角的乘积叫做这两个矢量的**点乘**或**标积**。因此，元功可定义为力矢量 $\boldsymbol{F}$ 和元矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 的标积

$$\mathrm{d}W=\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} \tag{1.11.2}$$

这个表达式也可以写成下面的形式

$$dW = F_s ds \tag{1.11.3}$$

此处 F_s 是力矢量 $\boldsymbol{F}$ 在质点位移的投影，也就是在 $d\boldsymbol{s}$ 方向上的投影。由于在略去二级小量的情况下，$d\boldsymbol{s} = d\boldsymbol{r}$，所以式（1.11.2）又可写成

$$dW = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} \tag{1.11.4}$$

即也可把元功定义为力与元位移的标积。

质点轨道由 $\boldsymbol{r}_0$ 移至 $\boldsymbol{r}$ 时所做功 W 可由式（1.11.4）积分得到

$$W = \int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} \tag{1.11.5}$$

在直角坐标中

$$W = \int_{x_0, y_0, z_0}^{x, y, z} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \tag{1.11.6}$$

注意：若质点受几个力 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$，…，$\boldsymbol{F}_n$ 的作用，一般不先求合力，再求合力所做的功，而是先求每一分力所做的功，然后累加起来，得出合力所做的功。这是根据标积运算的分配律，因为求算术和要比求几何和简便得多，用数学的形式写出即为

$$\begin{aligned} W &= \int \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int (\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \cdots + \boldsymbol{F}_n) \cdot d\boldsymbol{r} \\ &= \int \boldsymbol{F}_1 \cdot d\boldsymbol{r} + \int \boldsymbol{F}_2 d\boldsymbol{r} + \cdots + \int \boldsymbol{F}_n d\boldsymbol{r} \end{aligned}$$

在 SI 制中，功的单位是焦耳（J）。

表征做功快慢的物理量是力的**功率**，它是功对时间的微商

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} \tag{1.11.7}$$

在力也依赖于质点速度的一般情况下

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}\ (x,\ y,\ z;\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z};\ t) \tag{1.11.8}$$

要计算式（1.11.6），只给定质点的轨道还不够，还应当知道质点沿轨道运动的速度值，即坐标对时间的依赖关系。这时积分式（1.11.6）可以在时间 t 取作参量的形式下求出

$$W = \int_{t_0}^{t} (F_x \dot{x} + F_y \dot{y} + F_z \dot{z}) dt \tag{1.11.9}$$

这里，积分号下的括号就是力与速度的标积 $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}$，即功率。

在形式（1.11.8）的力的一般情形下，要计算功，必须知道质点的运动规律，即必须解动力学逆问题。

1.11.2 保守力场

恒定力场，也就是说该力场与时间无关，具有下述一个非常重要的性质：质

点沿一封闭曲线运动（也就是说质点运动到最后又回到起始位置），场力所做的功为零，这种力场称为**保守力场**。例如，引力场、电荷周围的场、弹性力场等等。但是电流周围的磁场是**非保守力场**。

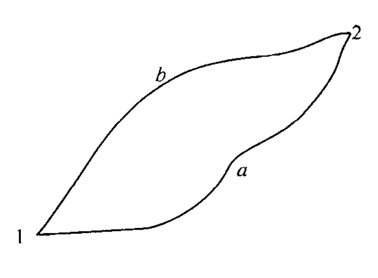


图 1.19　说明保守力场的示意图

由此性质立刻得到另一个结论：质点从一个位置到另一个位置场力所做的功与路径的形状无关，仅与其始末位置有关。我们来看点 1 和点 2 以及连接它们的曲线 a 和 b（见图 1.19）。假设质点沿曲线 a 由点 1 运动到点 2，然后再沿曲线 b 从点 2 回到点 1。在这种情况下场力做的总功等于零。用字母 W 表示功，我们可以写作

$$\boldsymbol{W} = \int_{1a2} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_{2b1} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0 = \oint \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{1.11.10}$$

式中，符号 $\oint$ 指环绕一闭合路径的积分，通常称为环路积分，例如从点 1 到点 2，然后可经不同的路径返回点 1。上式也可以简单地写为

$$W_{1a2} + W_{2b1} = 0 \tag{1.11.11}$$

质点移动的方向改变时，很显然，功的符号改变。因此从上面等式得

$$W_{1a2} = -W_{2b1} = W_{1b2} \tag{1.11.12}$$

也就是说，在保守力场中，功与连接始末两点曲线的形状无关，而仅由始末位置确定。

1.11.3　势能

由数学分析知，线积分 $\int_1^2 \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 与路径无关，表示积分号内必然是一个全微分，即存在一个单值、有限和可导的函数

$$U = U(x, y, z) \tag{1.11.13}$$

且

$$\boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\mathrm{d}U \tag{1.11.14}$$

函数 U 叫质点在（x，y，z）的**势能**或**位能**，或者**势函数**。上式表明，场力在力的方向上所做的元功等于势能的减少。

在直角坐标系中，式（1.11.14）为

$$F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y + F_z \mathrm{d}z = -\mathrm{d}U(x, y, z) \tag{1.11.15}$$

于是有

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \qquad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \tag{1.11.16}$$

式（1.11.16）的三个分量式也可以合写成一个矢量的形式

$$\boldsymbol{F} = -\operatorname{grad} U = -\nabla U \tag{1.11.17}$$

其中

$$\nabla = \operatorname{grad} = \boldsymbol{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \tag{1.11.18}$$

称为**梯度算符**。将它作用于标量函数 U 时即为

$$\nabla U = \boldsymbol{e}_x \frac{\partial U}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y \frac{\partial U}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial U}{\partial z} \tag{1.11.19}$$

在需要写成求和形式时，常用 x_1，x_2，x_3 代替 x，y，z，这样书写起来更为方便

$$\nabla = \sum_i \boldsymbol{e}_i \frac{\partial U}{\partial x_i} \qquad (i = 1,2,3) \tag{1.11.20}$$

在具体计算时，∇U 一般都写成式（1.11.19）的形式。但在推导公式时，理论物理工作者更喜欢把它写成

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}} \tag{1.11.21}$$

注意：算符∇是一个矢量算符。算符∇不仅如其定义式（1.11.18）所给出的，可以表示为沿直角坐标轴的分解式，也可以表示为沿其他正交曲线坐标轴的分解式：

算符∇沿柱面坐标轴的分解式

$$\nabla = \boldsymbol{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \boldsymbol{e}_\varphi \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \tag{1.11.22}$$

算符∇沿平面坐标轴的分解式

$$\nabla = \boldsymbol{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \tag{1.11.23}$$

算符∇沿球面坐标轴的分解式

$$\nabla = \boldsymbol{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \boldsymbol{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi} \tag{1.11.24}$$

算符∇沿曲线坐标轴的分解式

$$\begin{aligned}\nabla &= \boldsymbol{e}_1 \frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial q_1} + \boldsymbol{e}_2 \frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial q_2} + \boldsymbol{e}_3 \frac{1}{h_3}\frac{\partial}{\partial q_3} \\ &= \sum_i \boldsymbol{e}_i \frac{1}{h_i}\frac{\partial}{\partial q_i}\end{aligned} \tag{1.11.25}$$

其中，h_i 为度规系数（见1.3节）。

如何判定力所做的功与路径无关？或者，如何判断力是保守力还是非保守力？或者再换句话说，势能存在的条件是什么？

作为位置函数的力为保守力的必要条件很容易从方程（1.11.17）和多变量

连续函数的 n 阶偏微商与微商顺序无关的性质得到。具体地说，对于二阶偏微商有

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} \tag{1.11.26}$$

对于其他的二阶偏微商也有类似的关系。凡任何可表示为势能函数的负梯度的保守力，方程

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial F_x}{\partial y}&=-\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}=\frac{\partial F_y}{\partial x}\\
\frac{\partial F_z}{\partial x}&=-\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}=\frac{\partial F_x}{\partial z}\\
\frac{\partial F_y}{\partial z}&=-\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y}=\frac{\partial F_z}{\partial y}
\end{aligned}\right\} \tag{1.11.27a}$$

必然成立。方程（1.11.27a）表述了一个力是保守力的必要条件。可以证明它也是充分条件。

用矢量的旋度来表示上述充分条件将更为简洁而且便于记忆。矢量 $\boldsymbol{F}$ 的旋度定义为

$$\nabla \times \boldsymbol{F}=\begin{vmatrix}
\boldsymbol{e}_x, & \boldsymbol{e}_y, & \boldsymbol{e}_z\\
\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\
F_x & F_y & F_z
\end{vmatrix} \tag{1.11.28}$$

方程（1.11.27a）表明，保守力的旋度等于零

$$\nabla \times \boldsymbol{F}=0 \tag{1.11.27b}$$

依据矢量分析中的斯托克斯定理

$$\int(\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}=\oint \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

这个定理将矢量函数的旋度沿曲面法向分量的面积分与该矢量函数沿包围曲面的闭合路径的切向分量的线积分联系起来。而由 $\boldsymbol{F}$ 的旋度为零，即式（1.11.27b）得

$$\oint \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=0$$

上式就是前面讲过的式（1.11.10）。这就保证了力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功与路径无关。这样，我们也就证明了力的旋度等于零也是保守力的充分条件。所以力的旋度等于零是保守力的充要条件。

应当指出，梯度矢量场 $\boldsymbol{F}$ 可由给定的势函数 U 单值地确定，但逆问题——由给定场 $\boldsymbol{F}$ 确定势能 U——就没有这一性质。也就是说，由给定场不能单值求出势能。实际上，若 $\boldsymbol{F}$ 是梯度场［即满足式（1.11.26)］，则积分式（1.11.14)

便可得势能

$$U = -\int \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + c \tag{1.11.29}$$

我们看到，势能可精确到一个任意的附加常数项。与此相联系，计算质点做功的起点的选择是任意的。

我们可在势场中取一点 P_0（x_0，y_0，z_0），规定质点在此点的势能为零，即取 U（x_0，y_0，z_0）$=0$（例如重力场中常取地面为零），则质点从点 $P(x,y,z)$ 沿任一路径运动到点 P_0 时，场力所做的功

$$\begin{aligned}\int_P^{P_0} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= -\int_P^{P_0} \mathrm{d}U = U(x,y,z) - U(x_0,y_0,z_0) \\ &= U(x,y,z)\end{aligned} \tag{1.11.30}$$

位置 P_0 称为势能的**零值位置**（也称比较位置）。上式表示，质点在给定位置的势能等于质点在有势力场中从给定位置沿任一路径运动到零值位置时所做的功。

通常对于势能常数这样选择，在质点距其他物体无穷远处其势能变为零，即选无穷远处为势能的零值位置。

由于 $\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \mathrm{d}\boldsymbol{r}$，所以式（1.11.14）可以写成

$$\boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \mathrm{d}U \tag{1.11.31}$$

或者

$$F_s \mathrm{d}s = -\mathrm{d}U \tag{1.11.32}$$

式中，F_s 为力 $\boldsymbol{F}$ 在 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 方向的投影。从力的投影和势能相联系的公式还可做出力的方向的论断。若在某方向势能增加（$\mathrm{d}U/\mathrm{d}s > 0$），则力在这个方向的投影是负的，也就是说场力的方向指向势能降低的方向。

为了说明式（1.11.32）这个关系，我们来求重力场中的势能。设场力的方向沿 z 轴，则 $\boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = F\mathrm{d}z$，从而有 $-\mathrm{d}U = F\mathrm{d}z$，对此式进行积分得

$$U = -Fz + \mathrm{const} \tag{1.11.33}$$

选 $z=0$ 处势能为零，则 const 为零，于是

$$U = -Fz \tag{1.11.34}$$

我们已经建立了势能的概念。现在就用势能的概念来讨论动量守恒定律与空间均匀性之间的深刻联系。

空间是均匀的，这就意味着封闭系统与它在空间中所处的位置无关。由于空间的均匀性，它的力学性质不变。设想质点系在空间中经历一无穷小位移，在移动时所有质点都在同一方向上移动相同的距离，我们把这个位移矢量记作 $\mathrm{d}\boldsymbol{R}$。此时第 α 个质点做的功等于 $\boldsymbol{F}_\alpha \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{R}$。所有这些功的总和应该等于系统势能变化的负值。但是，系统的性质与它在空间中位置的无关性意味着，这个势能的变化等于零。因此

$$\boldsymbol{F}_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{R}+\boldsymbol{F}_2\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{R}+\cdots=(\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\cdots)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{R}=-\mathrm{d}U=0 \quad (1.11.35)$$

因为这个等式对任意方向的矢量 d$\boldsymbol{R}$ 都应该成立，只有合力为零，即

$$\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\cdots=0 \quad (1.11.36)$$

因而系统的动量

$$\boldsymbol{P}=\mathrm{const} \quad (1.11.37)$$

这里我们清楚地看到，动量守恒定律是和空间均匀性相联系的。关于这一点在分析力学中还要进一步讨论。

势能的优点在于它是一个标量，在做梯度运算以前，可以不必涉及因选取矢量的分量而增添的复杂问题。在直接计算力时，在整个计算过程中都需要涉及分量。所以利用势能来计算施于物体上的力往往比较方便。但在有些问题中，可能直接计算力要比求出势能再取梯度更容易。例如，如果问题具有一特殊的对称性，从物理上考虑，可以断定力具有特定的方向，那么选取这个方向作为坐标轴的方向时，就可以把矢量计算简化为标量计算。在这种情况下，直接计算力更为直接了当，而不必用势能来计算。因此，很显然，在选定应使用的方法时是需要一些技巧的。对于每个求力的问题都必须考虑使用哪一种计算方法最容易。

1.12 牛顿引力定律

1.12.1 牛顿引力定律

引力在自然界起着非常重要的作用。引力相互作用所有的物体都有，因而常称之为**万有引力**。它与物体是否带电无关，而仅取决于物体的质量。引力相互作用的特征是，所有物体都相互吸引，且这个相互作用正比于质量。

按照牛顿万有引力定律，与质量为 M 的质点相距为 r 处的一个质量为 m 的质点，所受的引力为

$$\boldsymbol{F}=-G\frac{mM}{r^2}\boldsymbol{e}_r \quad (1.12.1)$$

式中，r 是从质点 M 到质点 m 的距离，$\boldsymbol{e}_r$ 是从 M 指向 m 的单位矢量。负号保证了此力为吸引力。G 是一个与相互作用物体性质无关的常数

$$G=6.67\times10^{-11}\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{kg}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-2}$$

G 非常小，表明引力只有在质量很大的情况下才起作用。正因为这个原因万有引力在原子和分子力学中几乎不起什么作用（电磁力较引力大得多，前者约为后者 10^{39}倍）。像太阳、行星、月球这样大质量物体运动完全由万有引力确定。通常，引力只有牵涉到物体其中至少有一个具有天文学上的大小时才是重要的。我们居住的地球正属于这一类，所以重力在人们日常生活中有重要影响。

1.12.2 引力势能

设 U 为万有引力势能，则万有引力 $\boldsymbol{F}$ 和其势能 U 间的关系为

$$\boldsymbol{F} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\boldsymbol{e}_r \tag{1.12.2}$$

考虑到式（1.12.1）和（1.12.2）相等，可得

$$\mathrm{d}U = G\frac{mM}{r^2}\mathrm{d}r$$

对上式积分

$$U = -G\frac{mM}{r} + c$$

选无穷远处势能为零，即当 $r\to\infty$时，$U|_\infty = 0$，则可确定积分数 $c = 0$。于是得引力势能为

$$U = -G\frac{mM}{r} \tag{1.12.3}$$

引力场场强 $\boldsymbol{g}$ 定义为：在质量为 M 的物体的场中作用于单位质量质点上的力矢量，因此

$$\boldsymbol{g} = \frac{\boldsymbol{F}}{m} = -G\frac{M}{r^2}\boldsymbol{e}_r \tag{1.12.4}$$

$\boldsymbol{g}$ 具有每单位质量的力或加速度的量纲。事实上，在地球表面附近，$\boldsymbol{g}$ 的数值就是所谓**重力加速度常数**，$|\boldsymbol{g}| = g = 9.8\mathrm{m/s^2}$（在地球表面的近似值）。

以式（1.12.1）表述的牛顿万有引力定律严格地说仅对**点状粒子**适用。如果质点中的一个或两个都换为具有一定大小的物体，那么我们必须假定万有引力场是个**线性场**才能计算。这就是说，假定许多质点作用于另外一个质点的总万有引力，可以简单地取所有单独作用力的矢量和来计算。对于由连续分布的物质组成的物体，求和变为积分

$$\boldsymbol{F} = -Gm\int_V \frac{\rho(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{e}_r}{r^2}\mathrm{d}\tau' \tag{1.12.5}$$

$\rho(\boldsymbol{r})$ 是质量密度，$\mathrm{d}\tau'$是由位矢$\boldsymbol{r}'$确定的位置处的体积元，V 为物体M 的体积（见图1.20）。若质量为 M 的物体和质量为 m 的物体二者都具有一定大小，则为了计算总的万有引力，就必须对 m 的体积也要做一次积分。

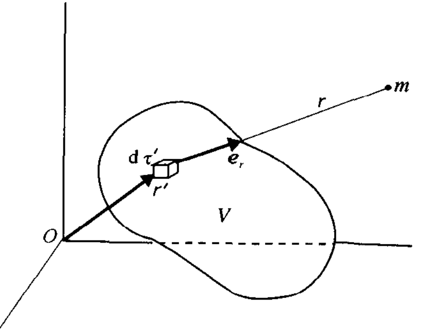


图 1.20 计算引力示意图

对于物体 M 为连续分布的物质组成

时，引力场强 $\boldsymbol{g}$ 也相应地变成

$$\boldsymbol{g} = -G\int_V \frac{\rho(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{e}_r}{r^2}\mathrm{d}\tau' \tag{1.12.6}$$

1.12.3 重力势能

作用在地球表面附近物体上的力，叫做物体的**重量**。设物体在地面上的高度为 z，地球的半径为 R，物体到地心的距离为 $R+z$，则物体的重量 P 由下式确定

$$P = G\frac{mM}{(R+z)^2} \tag{1.12.7}$$

其中，M 是地球的质量，m 为物体的质量。如果物体离地面的高度 z 与地球的半径R 比较很小而可以忽略，那么上式则变为

$$P = mg \tag{1.12.8}$$

则

$$g = G\frac{M}{R^2} \tag{1.12.9}$$

在这种情况下，常量 g 叫做**重力加速度**，这就是在重力场中自由落体的加速度。

当离地面的高度 z 不太大，且地面局部范围也不太大的情况下，引力可以认为是不变的常量，即**重力**

$$\boldsymbol{P} = -mg\boldsymbol{e}_z \tag{1.12.10}$$

又由于力等于势能的负梯度，即

$$\boldsymbol{P} = -\frac{\partial U}{\partial z}\boldsymbol{e}_z \tag{1.12.11}$$

上二式比较可得

$$U = \int mg\mathrm{d}z = mgz + c$$

设 $z=0$ 时，$U=0$，则得 $c=0$。于是

$$U = mgz \tag{1.12.12}$$

从前面关于对势能性质的讨论来看，这也是非常明显的。这里力的方向垂直向下，也就是指向重力势能减少的方向。

最后，还需特别指出，作用在物体上的重力与其质量成正比的事实（$\boldsymbol{P}=m\boldsymbol{g}$），具有深刻的物理内容。因为质量获得的加速度等于作用在它上面的力除以质量，故在重力场中粒子的加速度与其场的场强相同

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{g} \tag{1.12.13}$$

这就是说，**所有物体在重力场中具有相同的加速度，而与其质量无关**。众所周知，这个性质是由实验物理的先驱伽利略从实验中发现的。

顺便指出，质心概念是物体在重力场中重心概念的推广。在均匀重力场中，质心与重心合为一点。

1.13 能量守恒定律

1.13.1 动能定理

根据质点从一点移动到另一点时保守力场中所做的功与路径无关的事实可推导出一个重要的关系——**能量守恒定律**。为求得这个关系，首先让我们回顾一下作用在质点上力的公式，即牛顿第二定律

$$\boldsymbol{F} = m\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$$

因加速度在运动方向的投影等于 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$，故力在此方向上的投影为

$$F_s = m\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{1.13.1}$$

现在我们来求在无限小的路径 $\mathrm{d}s = v\mathrm{d}t$ 上，这个力所做的功

$$\mathrm{d}W = F_s\mathrm{d}s = mv\mathrm{d}v$$

或写成

$$\mathrm{d}W = F_s\,\mathrm{d}s = \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) \tag{1.13.2a}$$

由此可见，力所做的元功等于量$\frac{1}{2}mv^2$ 的增量。量$\frac{1}{2}mv^2$ 称之为**动能**。

由于 $F_s\mathrm{d}s = \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$，所以式（1.13.2a）又可写为

$$\mathrm{d}W = \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) \tag{1.13.2b}$$

式（1.13.2）表明，**质点动能的微变化等于合力所做的元功**。

1.13.2 能量守恒定律

如前所述，一方面我们看到，力所做的功等于动能的增加，另一方面又看到，功等于势能的减少，从而有

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = -\,\mathrm{d}U \tag{1.13.3}$$

也就是

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}mv^2 + U\right) = 0$$

将上式括号中的部分用字母 E 来表记，对上式进行积分，则有

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U = \mathrm{const} \tag{1.13.4}$$

我们看到，仅与速度有关的质点的动能及仅与坐标有关的势能之和，在质点运动中保持不变，这个和叫质点的**总能量**，或者简称为**能量**。所得到的关系式（1.13.4）叫**能量守恒定律**。由式（1.13.4）可见，当质点所受的力都是保守力时，尽管其动能和势能可以互相消长，但总能量保持不变。

如果作用在质点上的力是非保守力或耗散力，或其中一些力是这种力，则式（1.13.4）不能成立。对于耗散力而言，一部分转化为热散逸，但热也是能的另一种形式，为使上述的能量不与热能混淆，常称其为**机械能**。如果将式（1.13.4）所述的思想加以推广，宇宙间各种能量的总和总是不变的，它只能由一种形式转化为另一种形式，这就是能量转化和守恒定律，是物理学中最基本的定律之一，也是宇宙中最基本的定律之一。

能量守恒定律对于所有封闭系统都是正确的。动能永远是正值（见分析力学2.9节），而粒子间相互作用的势能都是既可为正值，又可为负值。如果两个质点间的势能这样确定，当粒子间彼此相距很远时，其势能为零，则势能符号取决于粒子相互作用的性质：它们是相互排斥，还是相互吸引。由于作用在质点上的力永远指向势能降低的方向，粒子间吸引靠近导致势能减少，因此这个势能将是负的；反之，粒子间相互排斥，势能就是正的。

能量守恒定律的深刻根源乃是时间均匀性，关于这一点我们将在分析力学中再说明。

1.13.3 质点系的动能

求解质点系统的动力学问题，采用质心坐标系常可使计算简化。设惯性坐标系为 $Oxyz$，又取以质心为原点而坐标轴与惯性坐标系保持平行的质心坐标系 $Cx'y'z'$，则

$$\boldsymbol{r}_\alpha = \boldsymbol{r}'_\alpha + \boldsymbol{R} \tag{1.13.5}$$

其中，$\boldsymbol{R}$ 为质心相对于惯性坐标系的位矢，$\boldsymbol{r}'_\alpha$是点 P_α 相对于质心 C 的径矢。对于上式取微商则有

$$\boldsymbol{v}_\alpha = \boldsymbol{v}'_\alpha + \boldsymbol{V} \tag{1.13.6}$$

其中，$\boldsymbol{V}$ 为质心的速度。

质点系的动能 T 为

$$\begin{aligned} T &= \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha \boldsymbol{v}_\alpha^2 \\ &= \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha (\boldsymbol{v}'_\alpha + \boldsymbol{V})^2 \\ &= \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha \boldsymbol{v}'^2_\alpha + \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha \boldsymbol{V}^2 + \sum_\alpha m_\alpha \boldsymbol{v}'_\alpha \cdot \boldsymbol{V} \end{aligned} \tag{1.13.7}$$

上式右端第三项

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha}\boldsymbol{v}_{\alpha}' \cdot \boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}\sum_{\alpha} m_{\alpha}\boldsymbol{v}_{\alpha}' \tag{1.13.8}$$

注意到

$$\boldsymbol{V} = \frac{\sum_{\alpha} m_{\alpha}\boldsymbol{v}_{\alpha}'}{M} \tag{1.13.9}$$

其中，$M = \sum_{\alpha} m_{\alpha}$，于是式(1.13.8) 又可写成

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha}\boldsymbol{v}_{\alpha}' \cdot \boldsymbol{V} = M\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{V} \tag{1.13.10}$$

由于动坐标系的原点就选在质心 C 上，而质心相对于质心坐标系的速度 $\boldsymbol{V}$ 显然为零，所以

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha}\boldsymbol{v}_{\alpha}' \cdot \boldsymbol{V} = 0 \tag{1.13.11}$$

于是质点系的动能为

$$T = \frac{1}{2}M\boldsymbol{V}^2 + \frac{1}{2}\sum_{\alpha} m_{\alpha}\boldsymbol{v}_{\alpha}'^2 \tag{1.13.12}$$

上式表明，**质点系的总动能等于全部质量都集中在质心而运动的动能与质心系中各质点相对于质心坐标系的动能之和**，这个结论称为**柯尼希定理**。

1.13.4 势能曲线

如果质点被限制在只沿一个确定的曲线运动，也就是说一个自由度的运动，或者说一维运动。在这种情况下用一个坐标就足以描写质点的位置，例如选择某点作为起始点沿曲线计算的距离作为坐标。这个坐标以字母 x 标记。做一维运动粒子的势能是该一维坐标的函数：$U = U(x)$ 。这种系统若受保守力的作用，运动方程在一般形式下就可积分。这时，甚至没有必要写出运动方程本身，直接从表达能量守恒定律的方程式出发即可求其解。

根据能量守恒定律

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = \text{const} \tag{1.13.13}$$

因为动能不能有负值，所以应该满足下面的方程

$$U \leqslant E \tag{1.13.14}$$

这个不等式意味着，在运动时质点只能在势能不超过总能量的那些地方。如果我们令势能等于总能量，则得到能够确定质点运动边界的方程

$$U(x) = E \tag{1.13.15}$$

由于在这些点速度为零，故称它们为**停点**或者**转变点**。

式 (1.13.13) 是一个可用分离变量法求积分的一阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\sqrt{\frac{2}{m}(E-U(x))} \tag{1.13.16}$$

由此得

$$t=\sqrt{\frac{m}{2}}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{E-U(x)}}+c \tag{1.13.17}$$

总能量 E 和积分常数 c 在运动方程式的解里起着两个任意积分常数的作用。

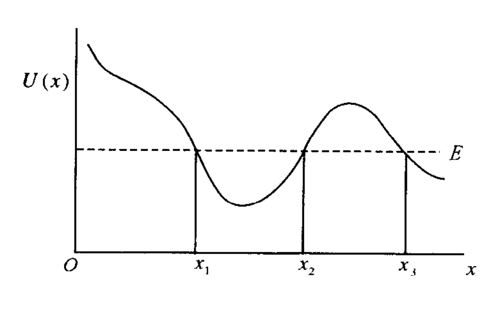


图 1.21 势能曲线

假设势能 $U(x)$ 有如图 1.21 所示的形状。图中与 Ox 轴平行的虚线为给定总能量的线。我们可以把运动区分为下面几种可能的情形：

(a) $x<x_1$，在此区间势能超过了总能量，根据式（1.13.16），速度是虚数，因此质点被排斥在此区间之外。

(b) $x_1<x<x_2$，在此区间内总能量超过势能，故质点可在 $x=x_1$ 和 $x=x_2$ 这两个端点之间的区域内运动。在这两个端点上 $E=U$，所以速度 $\dot{x}=0$。这两个点就是运动的转变点或停点。通常我们把曲线中上凸部分叫做**势垒**；而把下凹部分叫做**势阱**。质点到达上述这两点中任意一点时，都将碰到曲线上的势垒而掉转方向。如果质点的运动区间由两停点限制，则运动限制在有限的空间范围内，称为**有限运动**或**有界运动**。一维有限运动是一种振动。质点在势能曲线 $U(x)$ 所确定的势阱中，在 $x=x_1$ 和 $x=x_2$ 之间做周期性的往复运动。

(c) $x_2<x<x_3$，由于 $E<U$，是个势垒。所以这一区间的运动也被排斥在外。

(d) $x>x_3$，如果 $U(x)$ 始终小于其在 x_3 处的值，则自 x_3 到 $x\to\infty$ 的整个区间都是可以容许的区域。如质点自 x 较大处向 x_3 趋近，当碰到势垒壁上时，质点将被反射回去，无阻碍地走向无穷大。如果质点运动的范围没有限制或只限制一方，则叫**无限运动**或**无界运动**。

在经典力学中认为，时间不仅是均匀的，而且是各向同性的。也就是说，经典力学中的定律对时间反演是不变的，它的性质在过去和将来两个方向都是一样的。若以 $-t$ 代替 t，运动方程的形式不发生变化。换句话说，假如在系统里有某种运动是可能的，相反的运动也肯定是可能的。就从这个意义上说，按照经典力学定律进行的一切运动都是可逆的。

根据可逆性的一般性质，由 x_1 到 x_2 的运动时间和由 x_2 到 x_1 的逆运动时间是相等的，所以振动周期 T，即由 x_1 到 x_2，再由 x_2 返回 x_1 的时间，是通过

x_1 至 x_2 所需时间的 2 倍。根据式（1.3.17）有

$$T(E) = 2\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{E - U(x)}} = \sqrt{2m}\int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{E - U(x)}} \tag{1.13.18}$$

并且上下限 x_1 和 x_2 是方程（1.13.15）在 E 给定时的根。这个公式决定运动周期对粒子总能量的依赖关系。注意：这是一个**非正常积分**（被积函数在极限处变为无穷大），但是从物理角度看，这个积分必须存在，因为运动完全局限在势阱之内。

在经典力学的概念中，质点不能透过势垒，并在它到达势垒的边缘有时被反射回去，即在经典力学中，只有 $E>U$ 的质点才能穿越势垒而运动。但在量子力学中，情况就不是这样，$E>U$ 的质点有可能越过势垒，但也有可能被反射回去；而 $E<U$ 的质点，有可能被势垒反射回来，但也有一定的概率贯穿势垒，运动到另一侧的区域中去。这一现象为**隧道效应**，是因为微观粒子具有波动性的缘故。这一现象在半导体和超导物理中已得到广泛的应用，而经典力学对此无法解释。

1.14 角动量守恒定律

1.14.1 角动量

质点的位矢 $\boldsymbol{r}$ 与其动量 $\boldsymbol{p}$ 的矢量积称为**角动量**或**动量矩**

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p} = \boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v} \tag{1.14.1}$$

根据矢量的性质可知，角动量的大小为

$$|\boldsymbol{L}| = L = rp\sin\theta \tag{1.14.2}$$

式中，θ 为 $\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 构成的夹角，它的方向指向垂直于 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{r}$ 的构成的平面，并指向由 $\boldsymbol{r}$ 转到 $\boldsymbol{p}$ 的右手螺旋前进的方向（见图 1.22）。注意到 $r\sin\theta$ 是由 O 点到质点动量方向的垂直长度，通常叫做动量的**臂**。

在直角坐标系中

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z$$

$$\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{e}_x + v_y\boldsymbol{e}_y + v_z\boldsymbol{e}_z$$

因此，$\boldsymbol{L}$ 在直角坐标系中为

$$\boldsymbol{L} = L_x\boldsymbol{e}_x + L_y\boldsymbol{e}_y + L_z\boldsymbol{e}_z = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ x & y & z \\ mv_x & mv_y & mv_z \end{vmatrix} \tag{1.14.3}$$

或展开得

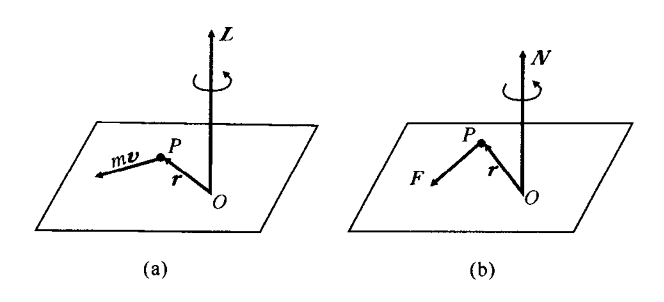


图 1.22 动量矩和力矩

$$\left.\begin{aligned} L_x &= m(yv_z - zv_y) \\ L_y &= m(zv_x - xv_z) \\ L_z &= m(xv_y - yv_x) \end{aligned}\right\} \tag{1.14.4}$$

众所周知，与角动量相似，如作用于质点 O 上的力为 $\boldsymbol{F}$，则对于固定点 O 的**力矩**定义是

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \tag{1.14.5}$$

力矩的大小为

$$|\boldsymbol{N}| = N = rF\sin\theta \tag{1.14.6}$$

式中，θ 为 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 之间的夹角。$r\sin\theta$ 是由 O 点到力方向的垂直距离，称为**力臂**。O 点称为矩心。

1.14.2 质点角动量定理

现在让我们来讨论角动量随时间的变化

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \times m\boldsymbol{v} + \boldsymbol{r} \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\boldsymbol{v})$$

注意到

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \times m\boldsymbol{v} = m\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v} = 0$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \tag{1.14.7}$$

或写成

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{N} \tag{1.14.8}$$

即质点对一点的角动量随时间的变化率等于合力对该点的力矩。这就是**角动量定理**，式（1.14.8）是角动量定理的微分形式。上式也可以写为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{L}=\boldsymbol{N}\mathrm{d}t$$

$\boldsymbol{N}\mathrm{d}t$ 称为在时间间隔 $\mathrm{d}t$ 内的**元角冲量**，对上式进行积分，得

$$\boldsymbol{L}_2-\boldsymbol{L}_1=\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{N}\mathrm{d}t \tag{1.14.9}$$

$\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{N}\mathrm{d}t$ 称为力矩 $\boldsymbol{N}$ 在时间间隔 t_2-t_1 的**角冲量或冲量矩**。式（1.14.9）是角动量定理的积分形式，它表明，质点角动量的变化等于该时间间隔内的角冲量。

可见，若质点不受力作用，或者虽受力作用，但诸力对某点的合力矩为零（例如有心力，力始终通过矩心，从而力矩恒为零），则对该点的角动量为恒矢量。这个论断称为**角动量守恒定律**。

1.14.3 质点系角动量定理

我们在 1.5 节曾提到，守恒量都具有可加性，因而只要把 $\boldsymbol{L}$ 理解为整个系统的角动量。$\boldsymbol{N}$ 理解成整个系统外力矩的矢量和，式（1.14.8）对于质点系也是正确的。下面就来证明这个论断。

质点系内力的合力矩

$$\boldsymbol{N}^{(\mathrm{i})}=\sum_{\alpha}\boldsymbol{r}_{\alpha}\times\boldsymbol{F}_{\alpha}^{(\mathrm{i})}=\sum_{\alpha}\sum_{\beta}\boldsymbol{r}_{\alpha}\times\boldsymbol{F}_{\alpha\beta} \tag{1.14.10}$$

由于求和的值与下标无关，所以 $\boldsymbol{N}^{(\mathrm{i})}$ 也可写成

$$\boldsymbol{N}^{(\mathrm{i})}=\sum_{\beta}\boldsymbol{r}_{\beta}\times\boldsymbol{F}_{\beta}=\sum_{\beta}\sum_{\alpha}\boldsymbol{r}_{\beta}\times\boldsymbol{F}_{\beta\alpha} \tag{1.14.11}$$

将式（1.14.10）与（1.14.11）相加，并考虑到

$$\boldsymbol{F}_{\beta\alpha}=-\boldsymbol{F}_{\alpha\beta} \tag{1.14.12}$$

则有

$$\boldsymbol{N}^{(\mathrm{i})}=\frac{1}{2}\sum_{\alpha}\sum_{\beta}(\boldsymbol{r}_{\alpha}-\boldsymbol{r}_{\beta})\times\boldsymbol{F}_{\alpha\beta} \tag{1.14.13}$$

引入符号

$$\boldsymbol{r}_{\alpha}-\boldsymbol{r}_{\beta}\equiv\boldsymbol{r}_{\alpha\beta} \tag{1.14.14}$$

矢量 $\boldsymbol{r}_{\alpha\beta}$ 沿系统内第 β 个质点与第 α 个质点的连线方向，所以

$$\boldsymbol{r}_{\alpha\beta}/\!/\boldsymbol{F}_{\alpha\beta} \tag{1.14.15}$$

因而式（1.14.13）的求和中所有的矢量叉乘积均为零，从而

$$\boldsymbol{N}^{(\mathrm{i})}=0 \tag{1.14.16}$$

这里我们还需要指出 $\boldsymbol{N}^{(\mathrm{i})}=0$ 的另一个可能的原因，即矢量 $\boldsymbol{r}_{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{r}_{\beta}$ 相等的情况，这时

$$\boldsymbol{r}_{\alpha\beta}=0 \tag{1.14.17}$$

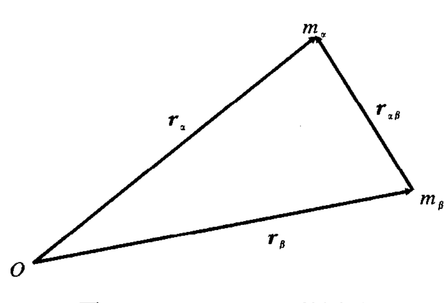


图 1.23 $\boldsymbol{r}_\alpha-\boldsymbol{r}_\beta=\boldsymbol{r}_{\alpha\beta}$的图示

这种情况发生在接触物体间相互作用为表面力的情况①。

不论怎样，等式（1.14.15）和(1.14.17)均保证了式(1.14.16)的满足，所以对于质点系而言，式(1.14.8)就变成

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{N}^{(\mathrm{e})} \tag{1.14.18}$$

其中

$$\boldsymbol{L}=\sum_\alpha \boldsymbol{r}_\alpha\times\boldsymbol{p}_\alpha \tag{1.14.19}$$

为系统的总角动量。这个量的可加性是显而易见的，并且像动量一样，它也与质点之间是否存在着相互作用无关。式（1.14.18）说明，系统的总角动量对时间的微商等于所有外力的合力矩，这就是**质点系角动量定理**。对于封闭系，因$\boldsymbol{N}^{(\mathrm{e})}=0$，由式（1.14.18）得到运动积分

$$\boldsymbol{L}=\mathrm{const} \tag{1.14.20}$$

即封闭系统总角动量守恒。

根据式（1.14.18）是否可以做出结论：内力不能改变系统的总角动量$\boldsymbol{L}$？回答是：如果系统是封闭的，则不能；如果系统不是封闭的，则一般说是可能的。外力的合力矩$\boldsymbol{N}^{(\mathrm{e})}$可能依赖于质点位置$\boldsymbol{r}_\alpha$，而这些$\boldsymbol{r}_\alpha$是可以被内力改变的。因此，内力也可能改变角动量$\boldsymbol{L}$。

既然在角动量的定义里含有质点的位矢，所以一般说来其值依赖于坐标原点的选择。相对于距离为S的两个原点，同一点的位矢$\boldsymbol{r}_\alpha$和$\boldsymbol{r}'_\alpha$之间的关系是

$$\boldsymbol{r}_\alpha=\boldsymbol{r}'_\alpha+\boldsymbol{S} \tag{1.14.21}$$

所以有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}&=\sum_\alpha \boldsymbol{r}_\alpha\times\boldsymbol{p}_\alpha\\&=\sum_\alpha(\boldsymbol{r}'_\alpha+\boldsymbol{S})\times\boldsymbol{p}_\alpha\\&=\sum_\alpha \boldsymbol{r}'_\alpha\times\boldsymbol{p}_\alpha+\boldsymbol{S}\times\sum_\alpha\boldsymbol{p}_\alpha\end{aligned}$$

或者

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}'+\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{P} \tag{1.14.22}$$

从式（1.14.22）可以看出，只有当系统静止时（也就是说$\boldsymbol{P}=0$时），它的角动量才不依赖于原点的选择。显然，角动量的值虽然不确定，但并不影响角动量守恒定律，因为封闭系统的动量也是守恒的。

① 此种情况属于连续介质力学的课题，超出本书的范围，读者如感兴趣，可参阅有关书籍。

1.14.4 不同惯性系中角动量的联系

现在我们来推导联系两个不同的惯性系 K 和 K' 中角动量的公式。设这两个惯性系中的第二个相对于第一个以速度 $\boldsymbol{V}$ 运动。如果在某时刻系统 K 和 K' 的坐标原点是重合的，此时质点的位矢在两个坐标系中也是一样的，而速度以

$$\boldsymbol{v}_\alpha = \boldsymbol{v}'_\alpha + \boldsymbol{V} \tag{1.14.23}$$

相联系，所以有

$$\boldsymbol{L} = \sum_\alpha m_\alpha \boldsymbol{r}_\alpha \times \boldsymbol{v}_\alpha = \sum_\alpha m_\alpha \boldsymbol{r}_\alpha \times \boldsymbol{v}'_\alpha + \sum_\alpha m_\alpha \boldsymbol{r}_\alpha \times \boldsymbol{V} \tag{1.14.24}$$

上式中右边的第一个求和是在系统 K' 的角动量 $\boldsymbol{L}'$，根据式（1.7.9）引入质心的位矢

$$\boldsymbol{R} = \frac{\sum_\alpha m_\alpha \boldsymbol{r}_\alpha}{M} \tag{1.14.25}$$

于是式（1.14.24）可以写成

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}' + M\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{V} \tag{1.14.26}$$

这个公式决定了从一个坐标系转移到另一个坐标系时角动量的转换规律。我们看到这个公式类似于式（1.7.6）的动量转换规律。

若我们所考察的力学系统整体在 K' 系中静止，那么 $\boldsymbol{V}$ 就是该系统质心运动的速度，$M\boldsymbol{V}$ 是其总动量 $\boldsymbol{P}$（相对于 K 系），于是

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}' + \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{P} \tag{1.4.27}$$

换句话说，力学系统的角动量是由相对于系统为静止的坐标系中系统的角动量 $\boldsymbol{L}'$ 和系统整体运动所产生的角动量 $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{P}$ 之和。

*1.15 弹性碰撞

1.15.1 弹性碰撞和非弹性碰撞

在物理学中，碰撞一词用得十分广泛，其含义也十分广泛。它并不只是日常生活中所理解的两个物体之间有接触的碰撞。碰撞问题所讨论的一般是两个粒子所构成的封闭系统，它们在进入相互作用范围之前已经有一定的动能，并因此相互接近而进入相互作用。相互作用的过程细节人们也可能很清楚，也可能不甚清楚，或者知之甚少。我们不妨把粒子相互碰撞的邻近区域想像成一个“黑匣子”，我们只考虑进去和出来粒子的状况，至于匣子里面发生过程的细节和性质对问题毫无关系。相互作用（碰撞）的结果可以是多种多样的：可能构成一个束缚系统；也可能最终脱离了彼此的相互作用而各奔他方，重新变成了两个不受作用的

自由粒子。对于碰撞后最终各奔他方的两个粒子来说，如果在碰撞前后的总能量没有发生变化，这种碰撞称为**弹性碰撞**，否则就称为**非弹性碰撞**。此外，两个粒子的质量分配也可能会发生变化（不考虑相对论效应带来的质量变化），这时碰撞后形成了不同于碰撞前的新粒子。为简单起见，这里的讨论仅限于弹性碰撞。当然，吸收动能或者释放静止质量能量的碰撞过程也是十分重要的。然而，双粒子运动学的所有基本特征可以由弹性碰撞充分阐明，所以略去了对更为复杂的碰撞过程的讨论。

1.15.2 质心系和实验室系

如果选取一个相对于系统的质心为静止的坐标系，则许多物理过程的描述可大为简化。在我们即将讨论的两个粒子的弹性碰撞问题中，通常为一运动的粒子与一静止的粒子之间的碰撞。虽然在一个质心为静止的坐标系中描述碰撞的效应确实比较简单，但实际测量还是在其中一个粒子是运动的，而被撞粒子最初为静止的那个坐标系中进行的。大家知道，后一个坐标系称为**实验室坐标系**。我们通常把这两个坐标系简称为质心系和实验系，我们既希望利用在质心系中描述弹性碰撞的简便性，实际测量又不得不在实验室系进行，这样就有必要导出联系质心坐标系和实验坐示系的方程。

1.15.3 一般情况

为简单计，我们这里不讨论碰撞后形成新粒子的情况，而且只讨论由无穷远而来，最终无穷远离去的弹性碰撞。假定两粒子的质量分别为 m_1 和 m_2，碰撞前的动量分别为 $\boldsymbol{p}_1$ 和 $\boldsymbol{p}_2$，碰撞后的动量分别为 $\boldsymbol{p}_1'$和 $\boldsymbol{p}_2'$。碰撞前的速度分别为 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$，碰撞后的速度分别为 $\boldsymbol{v}_1'$和 $\boldsymbol{v}_2'$。简单而言，带撇的各量是表示碰撞后的。

因为碰撞的两粒子组成封闭系统，所以在碰撞过程中和碰撞前后总动量守恒

$$\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{p}_1'+\boldsymbol{p}_2' \tag{1.15.1}$$

又因假定为弹性碰撞，故碰撞前后总动能亦未变

$$\frac{\boldsymbol{p}_1^2}{2m_1}+\frac{\boldsymbol{p}_2^2}{2m_2}=\frac{\boldsymbol{p}_1'^2}{2m_1}+\frac{\boldsymbol{p}_2'^2}{2m_2} \tag{1.15.2}$$

通常在质心坐标系研究碰撞问题比较简单。由于质心在质心坐标系中静止不动，因而在碰撞前后，两粒子动量的矢量和分别等于零。又因为在我们所讨论的问题中，质心系也是一个惯性系，所以，能量守恒的表达式（1.15.2）在质心系也适用。以下标“0”表示在质心系中所观察到的量，则前面两式变为

$$\boldsymbol{p}_{10}+\boldsymbol{p}_{20}=\boldsymbol{p}_{10}'+\boldsymbol{p}_{20}'=0 \tag{1.15.3}$$

和

$$\frac{p_{10}^2}{2m_1}+\frac{p_{20}^2}{2m_2}=\frac{p_{20}'^2}{2m_1}+\frac{p_{20}'^2}{2m_2} \tag{1.15.4}$$

由这两式很容易解出

$$p_{10}'=p_{20}'=p_{10}=p_{20} \tag{1.15.5}$$

也就是说，在碰撞后，两粒子的动量不改变大小，只可能改变方向，如图 1.24 所示，图中 $\boldsymbol{n}_0$ 表示 $\boldsymbol{n}_{10}$方向的单位矢量。

根据以上分析可知，如果给出 $\boldsymbol{n}_{10}$和 $\boldsymbol{n}_{20}$，由质心系中求出的量换算成在其他惯性系中相应的量，则必须知道矢量 $\boldsymbol{p}_1$ 和 $\boldsymbol{p}_2$ 以及标量 m_1/m_2，在质心系中得出的最后结果是

$$\boldsymbol{p}_{10}'=p_{10}\boldsymbol{n}_0,\qquad \boldsymbol{p}_{20}'=-p_{20}\boldsymbol{n}_0 \tag{1.15.6}$$

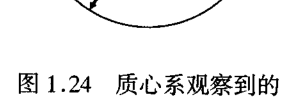


图 1.24 质心系观察到的两质点散射

引入粒子的相对速度

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2 \tag{1.15.7}$$

若速度用动量表示，即 $\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{p}_1/m_1$，$\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{p}_2/m_2$，则

$$\boldsymbol{v}=\frac{\boldsymbol{p}_1}{m_1}-\frac{\boldsymbol{p}_2}{m_2}=\frac{m_2\boldsymbol{p}_1-m_1\boldsymbol{p}_2}{m_1m_2} \tag{1.15.8}$$

相对速度的这个表达式的形式是与坐标系无关的。在质心坐标系中，$\boldsymbol{v}$ 应表示为

$$\boldsymbol{v}=\frac{m_2\boldsymbol{p}_{10}-m_1\boldsymbol{p}_{20}}{m_1m_2} \tag{1.15.9}$$

由式（1.15.3）知，$\boldsymbol{p}_{20}=-\boldsymbol{p}_{10}$，将其代入上式得

$$\boldsymbol{p}_{10}=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\boldsymbol{v}$$

令

$$\mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2} \tag{1.15.10}$$

μ 称为两粒子的**折合质量**。则

$$\boldsymbol{p}_{10}=\mu\boldsymbol{v} \tag{1.15.11}$$

所以，式（1.15.6）用相对速度表示就是

$$\boldsymbol{p}_{10}'=-\boldsymbol{p}_{20}'=\mu v\boldsymbol{n} \tag{1.15.12}$$

因为观察是在实验室中进行的，所以还需要把结果用实验室系表示出来。根据式(1.7.9)，质心的速度为

$$\boldsymbol{v}_c=\frac{\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2}{m_1+m_2}$$

于是，可把 $\boldsymbol{p}_1'$和 $\boldsymbol{p}_2'$分别表示为

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{p}_1' &= \boldsymbol{p}_{10}' + m_1\boldsymbol{v}_c = \mu v\boldsymbol{n}_0 + \frac{m_1}{m_1+m_2}(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2) = \mu v\boldsymbol{n}_0 + \frac{\mu}{m_2}\boldsymbol{P} \\ \boldsymbol{p}_2' &= \boldsymbol{p}_{20}' + m_2\boldsymbol{v}_c = -\mu n\boldsymbol{n}_0 + \frac{m_2}{m_1+m_2}(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2) = -\mu v\boldsymbol{n}_0 + \frac{\mu}{m_1}\boldsymbol{P} \end{aligned}\right\} \tag{1.15.13}$$

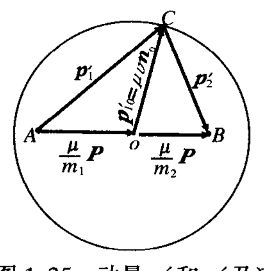


图 1.25 动量 $\boldsymbol{p}_1'$ 和 $\boldsymbol{p}_2'$ 及速度 $\boldsymbol{v}$ 示意图

式中，$\boldsymbol{v}$ 由式(1.15.9)所示，而 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2$。

对于已知的 $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$ 和不同的指向 $\boldsymbol{n}_0$ 来说，$\mu v\boldsymbol{n}_0$ 是一个定长矢量，即长度不变但方向可变的矢量。如将该矢量的起点固定在一点 O 上，如图 1.25 所示，则其矢端落在以 O 为圆心，以 μv 为半径的圆周上。如果单位矢量 $\boldsymbol{n}_0$ 沿着 $\overrightarrow{OC}$ 的方向，矢量 $\overrightarrow{AC}$ 和 $\overrightarrow{CB}$ 就给出相应的动量 $\boldsymbol{p}_1'$ 和 $\boldsymbol{p}_2'$。在给定 $\boldsymbol{p}_1$ 和 $\boldsymbol{p}_2$ 的条件下，圆的半径和点 A 与点 B 的位置是固定的，而点 C 在圆周上可以有任意的位置。

1.15.4 靶粒子静止的情况

在许多实际问题中，两粒子中有一个粒子在实验室中碰撞前处于静止状态，这个碰撞前不动的粒子通常称为**靶粒子**，在碰撞后，这个粒子获得了速度，称为**反冲粒子**，而运动的另一个粒子则称为**入射粒子**，在碰撞后则称为**散射粒子**。由于实际问题中这种情况比较多见，所以有必要进行较为详细的讨论。

假定碰撞前不动的粒子就是 m_2。在这种情况下 $m_2\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{p}_2=0$，$v=|\boldsymbol{v}_1|=v_1$，长度 $OB=\frac{m_2}{m_1+m_2}p_1=\mu v_1=\mu v$，所以 OB 和圆的半径相等，即 B 点在圆周上，如图 1.26 所示。而矢量 AB 和散射前第一个粒子的动量 $\boldsymbol{p}_1$ 相等。这时 A 点可以在圆内（如果 $m_1<m_2$），或者圆外（如果 $m_1>m_2$），或者在圆周上（如果 $m_1=m_2$）。图 1.26 中的（a）、（b）和（c）分别画出了与此相对应的图形。由三角学我们知道，三角形的外角等于两内角之和，所以 $\theta_1+\theta_2$ 等于碰撞后两粒子的飞出方向间的夹角，显然，当 $m_1<m_2$ 时 $\theta_1+\theta_2>\frac{\pi}{2}$，当 $m_1>m_2$ 时，$\theta_1+\theta_1<\frac{\pi}{2}$，而当 $m_1=m_2$ 时，$\theta_1+\theta_2=\frac{\pi}{2}$。值得注意的是，这些结论只是动量守恒和能量守恒的直接推论，与两粒子相互作用的具体形式无关（当然假定它们之间的相互作用力是保守力）。

在实验室坐标系中，入射粒子 m_1 的入射方向（$\boldsymbol{p}_1$ 的方向）与它被散射后的出射方向（$\boldsymbol{p}_1'$ 的方向）之间的夹角 θ_1 称为实验室坐标系的**散射角**。m_1 的入射方向（$\boldsymbol{p}_1$ 的方向）与 m_2 的反冲方向（$\boldsymbol{p}_2'$ 的方向）之间的夹角 θ_2 称为**反冲**

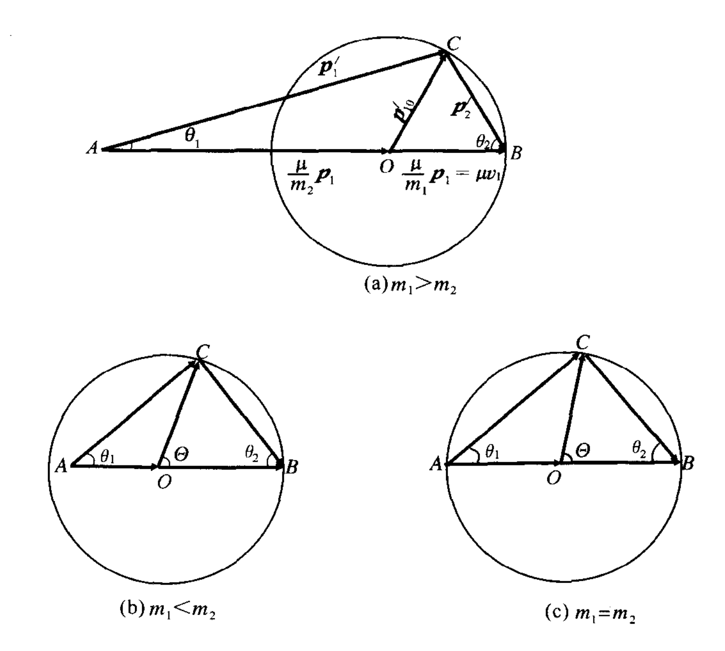


图 1.26　A 点位置与粒子的质量的关系

角。在图 1.27 中由 C 向 AB 作垂线 CD。从图上不难看出实验室坐标系中的散射角 θ_1 和反冲角 θ_2 与角 Θ（$\boldsymbol{n}_0$ 与 $\boldsymbol{p}_1$ 的夹角）之间的关系

$$\tan\theta_1=\frac{CD}{AD}=\frac{CD/OC}{(AO+OD)\ /OC}=\frac{\sin\Theta}{AO/OC+\cos\Theta}$$

从图 1.27 中所示各线段之间的数量关系可知，$OC=OB$，所以 $AO/OC=AO/OB=m_1/m_2$，于是得

$$\tan\theta_1=\frac{\sin\Theta}{m_1/m_2+\cos\Theta} \tag{1.15.14}$$

从图 1.27 看出，反冲角 θ_2 与角 Θ 的关系是

$$\theta_2=\frac{\pi-\Theta}{2} \tag{1.15.15}$$

图 1.27　各线段之间关系的图示

Θ 是在质心坐标系中看到的 m_1 的入射方向（$\boldsymbol{p}_{10}$的方向）与其出射方向（$\boldsymbol{p}'_{10}$的方向）之间的夹角，称为质心坐标系的**散射角**。从图 1.26 的（b）和（c）可以看到，当 $m_1<m_2$ 时，θ_1 与 Θ 一一对应。但由图 1.28 却看到，当 $m_1>m_2$ 时，实验室坐标系中的一个散射角 θ_1 与质心坐标系的两个散射角 Θ_1 和 Θ_2

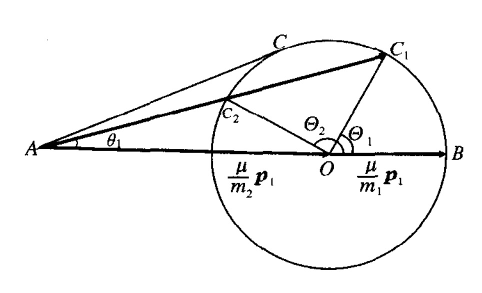


图 1.28 一个 θ_1 与两个 Θ 角对应的情况

对应。

现在我们来讨论实验室坐标系中的散射角 θ_1 可以取值的范围。当 $m_1 < m_2$ 时，对于各种不同的 $\boldsymbol{n}_0$ 来说，散射角 θ_1 可取 $0 \sim \pi$ 中的任一值，当 $m_1 = m_2$ 时，即质量相同的两个粒子（其中之一最初静止）的碰撞特别简单。这时不只是点 B 在圆周上，而且点 A 也位于圆周上，所以碰撞后两粒子飞出的方向互成直角。这时 $\theta_1 = \Theta/2$。

如果 $m_1 < m_2$，运动粒子的偏角则不能超过一个最大值，此最大值对应于图 1.28 中的那个位置，当 C 在此位置时直线 AC 和圆周相切（OC 在图中未把连线画出）。很明显

$$(\theta_1)_{\max} = \arcsin\frac{OC}{AO} = \arcsin\frac{\mu v_1}{\dfrac{m_1}{m_1+m_2}p_1} = \arcsin\frac{m_2}{m_1} \tag{1.15.16}$$

1.15.5 一维碰撞

如果碰撞不仅是完全弹性的，而且是一维的。所谓一维碰撞，就是指碰撞后的相对运动和碰撞前的相对运动是沿着同一直线的，则 Θ 等于 π，即是说 C 点的位置在直径上，并在 A 的左方（这时 $\boldsymbol{p}_1'$ 与 $\boldsymbol{p}_2'$ 互有相反的方向），或者在 A 与 O 之间（这时 $\boldsymbol{p}_1$ 和 $\boldsymbol{p}_2$ 有相同的方向）。

根据动量守恒式（1.15.1）和能量守恒式（1.15.2）很容易解出

$$\left.\begin{aligned} v_1' &= \left(\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right)v_1 + \left(\frac{2m_1}{m_1+m_2}\right)v_2 \\ v_2' &= \left(\frac{2m_1}{m_1+m_2}\right)v_1 + \left(\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\right)v_2 \end{aligned}\right\} \tag{1.15.17}$$

下面研究几个特别有趣的情况。当碰撞粒子具有相同的质量，即 $m_1 = m_2$ 时，上述两方程即可化简成

$$v_1' = v_2, \qquad v_2' = v_1 \tag{1.15.18}$$

这表示在一维碰撞中，质量相等的两粒子仅彼此交换自己的速度。

另一种我们特别感兴趣的情况是，粒子 m_2 最初处于静止状态，即 $v_2 = 0$。因此式（1.15.17）变为

$$\left.\begin{aligned} v_1' &= \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_1 \\ v_2' &= \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) v_1 \end{aligned}\right\} \tag{1.15.19}$$

这时 v_2'的值是最大的可能值。因此原先静止的粒子由于碰撞可能得到最大的能量是

$$E_{2\max}' = \frac{m_2 {v_2'^2}_{\max}}{2} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} E_1 \tag{1.15.20}$$

式中

$$E_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} \tag{1.15.21}$$

是碰撞前运动粒子的初能量。

对于这种情况，如果 $m_1 = m_2$，则由式（1.15.19）可得

$$v_1' = 0, \qquad v_2' = v_1 \tag{1.15.22}$$

当然，这正是我们预料的结果，亦即第一个粒子完全停止下来，而第二个粒子"取去"第一个粒子原来的速度。但如 m_2 比 m_1 大得多，则得

$$v_1' \approx - v_1, \qquad v_2' \approx 0 \tag{1.15.23}$$

这说明一个质量很小的粒子和一个质量很大的粒子碰撞时，质量很小的粒子调转方向，而质量大的粒子几乎保持不动。

最后，如果 m_2 比 m_1 小得很多，则

$$v_1' \approx v_1, \qquad v_2' \approx 2v_1 \tag{1.15.24}$$

这个结果告诉我们，质量很大的入射粒子的速度，不因它和质量很小的粒子碰撞而发生显著的改变，但质量很小的粒子却以近似于两倍入射粒子的速度运动起来。

在原子核反应堆内，由于铀原子裂变所产生的中子运动很快，如果要这些中子去激发其他原子以产生更多的裂变，就必须减少它们的运动速度。假定中子和静止的核做弹性碰撞，那么该选用何种物质才能有效地抑制反应堆内中子的运动？根据上面的讨论和计算，如果静止的靶核质量比中子质量小得很多，比如电子，结果中子就将几乎以其原有的速度继续向前运动。但是，如果静止的靶核和中子质量近于相等，中子就几乎在碰撞中停止下来。因此，氢是最有效的减速剂。因为氢的核——质子和中子近似地具有相同的质量。当然还有其他原因影响到中子减速剂的选择，但仅就动量方向来考虑，我们应该用较轻的元素。核反应堆中实际所用的氢包含在像水这样的化合物或混合物中，其他可以利用其减速性质的轻元素，包括质量数为 2 的氘及质量数为 12 的碳。目前实验室中常用石蜡、水和塑料中的氢来慢化中子。

习　题

1.1 已知 $x=d\cos\omega t$，$y=d\sin\omega t$，$z=c$，其中 d，ω，c 为常数，求速度和加速度。

〔答〕 $v=d\omega$

$\cos(\boldsymbol{v},v_x)=-\sin\omega t$，　$\cos(\boldsymbol{v},v_y)=\cos\omega t$，　$\cos(\boldsymbol{v},v_z)=0$

$a=d\omega^2$

$\cos(\boldsymbol{a},a_x)=-\cos\omega t$，　$\cos(\boldsymbol{a},a_y)=-\sin\omega t$，　$\cos(\boldsymbol{a},a_z)=0$

1.2 已知一质点做平面运动，它的运动规律在极坐标中为 $r=b\mathrm{e}^{kt}$，$\theta=\omega t$，其中 b，k，ω 为常数，试求其速度和加速度的大小，以及切向加速度和法向加速度。

〔答〕 $v=\sqrt{k^2+\omega^2}\,r$

$a=(k^2+\omega^2)r$

$a_\tau=\sqrt{k^2+\omega^2}\,bk\mathrm{e}^{kt}$

$a_n=\omega\sqrt{k^2+\omega^2}\,r$

1.3 已知质点沿 x 轴运动，其加速度 $\ddot{x}=A\sin kt$，其中 A，k 为常数，且 $t=0$ 时，$x=0$，$\dot{x}=0$，试求 x 和 t 的关系式 $x=x(t)$。

〔答〕 $x=\dfrac{A}{k}\left(t-\dfrac{1}{k}\sin kt\right)$

1.4 质点沿 x 轴运动，已知加速度 $\ddot{x}=k^2x$，且 $t=0$，$x=a$，$\dot{x}=0$，试求其 x 和 t 的关系式 $x=x(t)$，其中 k 为常数。

〔答〕 $x=\dfrac{a}{2}(\mathrm{e}^{kt}+\mathrm{e}^{-kt})$

1.5 已知质点的运动规律为 $x=3\cos\left(\dfrac{\pi}{8}+\pi t\right)$，$y=4\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\pi t\right)$，试求其运动轨道。

〔答〕 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}-\dfrac{xy}{6}\sin\dfrac{\pi}{8}=\cos^2\dfrac{\pi}{8}$

这是一个椭圆方程，因此其轨道为一个椭圆。

1.6 有一划平面曲线轨迹的点，其速度在 y 轴上的投影于任何时刻均为常数 c。试证任何情况下，加速度的值可用下式表示

$$a=\frac{v^3}{c\rho}$$

其中，v 为速度，ρ 为轨道曲率半径。

1.7 一质点以定值速率 c 沿一曲线运动，试证其速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 与加速度矢量 $\boldsymbol{a}$ 垂直。

1.8 直线 FM 在一给定的椭圆平面内以匀角速 ω 绕其焦点 F 转动。求此直线与椭圆的交点 M 的速度。已知以焦点为坐标原点的椭圆的极坐标方程为

$$r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$$

式中，a 为椭圆的半长轴，e 为偏心率，都是常数。

〔答〕 $v=\dfrac{r\omega}{b}\sqrt{r(2a-r)}$，式中 b 为椭圆半短轴。

1.9　如已知点的运动方程式为 $x = f_1(t), y = f_2(t)$，则其切向及法向速度可用下式表示

$$a_r = \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, \qquad a_n = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}$$

而轨道的曲率半径为

$$\rho = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}$$

试证明之。

1.10　设一质点 P 做等速螺旋运动，其方程式为

$$x = 2\sin 4t, \qquad y = 2\cos 4t, \qquad y = 4t$$

试求轨迹的曲率半径。

〔答〕　$\rho = \dfrac{x^2 + y^2 + 1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

1.11　一枪连放两次，第一次的初速度为 v，仰角为 α；第二次的初速度为 v'，仰角为 α' （$\alpha' < \alpha$）。弹道皆在同一悬直平面内。试证设放枪的时间间隔等于 $\dfrac{2}{g}\dfrac{vv'\sin(\alpha - \alpha')}{v\cos\alpha + v'\cos\alpha'}$，则两子弹将在空中互碰（空气阻力不计）。

1.12　一飞机距地面高 h，以匀速 v_1 做水平飞行，今有一高射炮，欲打中飞机，问高射炮炮弹的初速度 v_0 与水平成的夹角 α，应满足什么关系？设发射时飞机正在高射炮头顶，空气阻力不计。

〔答〕　α 所要满足的条件：$\cos\alpha = \dfrac{v_1}{v_0}$

v_0 所要满足的条件：$v_0^2 \geqslant v_1^2 + 2gh$

1.13　根据实验事实，若重力加速度随高度减少的规律为

$$g = g_0\left(1 + \frac{x}{R}\right)^{-2}$$

式中，R 为地球半径，g_0 为地面处的重力加速度，x 表示任一高度。试求以初速度 v_0 竖直上抛的质点的速度随高度变化的规律。

〔答〕　$v = \left[v_0^2 - 2R^2 g_0\left(\dfrac{1}{R} - \dfrac{1}{R + x}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$

1.14　质量为 m 的质点在恒力 F_0 的作用下运动，若在 $t = 0$ 时，质点具有初速度 v_0，今将质点速度增到 v_0 的 n 倍时，需多长时间。

〔答〕　$t = (n - 1)\dfrac{mv_0}{F_0}$

1.15　如图所示，有一质量为 m 的质点以原点 O 为平衡位置做简谐运动。当它通过原点 O 时，速度为 u。如在任一时刻，质点的坐标为 x，速度为 v，简谐振动的圆频率为 ω，试证

u　v　O　m　x

题 1.15 图

$$v^2 + \omega^2 x^2 = u^2$$

1.16　滑轮上系一不可伸长的绳，绳上悬一弹簧，弹簧另一端挂一重为 W 的物体。当滑

轮以匀速转动时，物体以匀速 v_0 下降。如将滑轮突然停住，试求弹簧的最大伸长及最大张力。假定弹簧受 W 的作用时的静伸长为 λ_0。

〔答〕 $\lambda_{max}=\lambda_0+v_0\sqrt{\dfrac{\lambda_0}{g}}$

$$T_{max}=W\left(1+\frac{v_0}{\sqrt{g\lambda_0}}\right)$$

1.17 一弹性绳上端固定，下端悬有 m 及 m' 两质点。设 a 为绳的固有长度，b 为加 m 后的伸长，c 为加 m' 后的伸长。今将 m' 任其脱离而下堕，试证质点 m 在任一瞬时离上端 O 的距离 l 为

$$l=a+b+c\cos\sqrt{\frac{g}{b}}t$$

1.18 一质点自一水平放置的光滑固定圆柱面凸面的最高点自由滑下。问滑至何处，此质点将离开圆柱面？假定圆柱体的半径为 r。

〔答〕 设 θ 为圆柱面的竖直半径与质点和中心联线间所夹之角，则当 $v=\arccos\dfrac{2}{3}$ 时，质点离开圆柱面。

1.19 一质量为 m 的质点自光滑圆滚线的尖端无初速地下滑。试证在任何一点的压力为 $2mg\cos\theta$，式中 θ 为水平线和质点运动方向间的夹角。已知圆滚线方程为

$$x=a(2\theta+\sin2\theta),\qquad y=-a(1+\cos2\theta)$$

且

$$\dot{\theta}=k,\qquad a=\frac{g}{4k^2}$$

1.20 在上题中，如圆滚线不是光滑的，且质点自圆滚线的尖端自由下滑，达到圆滚线的最低点时停止运动，试证明在这种情况下摩擦因数 μ 应满足下式

$$\mu^2e^{\mu\pi}=1$$

1.21 已知作用在质点上的力为

$$F_x=a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z$$

$$F_y=a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z$$

$$F_z=a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z$$

式中，系数 a_{ij}（i，$j=1$，2，3）都是常数。问这些 a_{ij} 应满足什么条件，才有势能？如果满足这些条件，试计算其势能。

〔答〕 $U=-\dfrac{1}{2}(a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{31}zx)$

1.22 自由质点的质量为 m，其运动轨道为一椭圆

$$x=a\cos kt,\qquad y=b\sin kt$$

式中，k 为常数，试求从 $t=0$ 到 $t=\dfrac{\pi}{4k}$ 的一段时间内，作用在质点上的力所做的功。

〔答〕 $W=\dfrac{mk^2}{4}(a^2-b^2)$

1.23 一质量为 m 的质点，受一与距离成反比的吸引力作用在一直线上运动，比例系数为 k。如此质点从距原点 O 为 a 的地方由静止开始运动，求其到达 O 点所需的时间。

〔答〕 $t=a\sqrt{\frac{m\pi}{2k}}$

1.24　一条均匀的链条在地面上卷成一堆。某人持链条的一端以均匀的速率 v 将其举高。试证手离地面高度为 x 时，手中所感到的压力等于长为 x^2+v^2/g 的一链条的重量。

1.25　雨滴下落时，其质量的增加率与雨滴的表面积成正比例，求雨滴 t 秒后下落的距离。设雨滴开始自由下落时质量为 M，空气阻力略而不计。

〔答〕 $x=\frac{g}{2}\left[\frac{M}{k}t+\frac{t^2}{2}-\frac{M^2}{k^2}\ln\left(1+\frac{k}{M}-t\right)\right]$

式中，k 为在单位时间内雨滴质量的增量。

1.26　近代火箭技术都采用多级火箭，以满足发射超级重量的地球卫星和宇宙飞船的需要。试用动量守恒定律证明 n 级火箭的最终速度应为

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_{ri}\ln N_i$$

式中，v_{ri}为 i 级火箭的喷气速度，N_i 为第 i 级的质量比。

第二章　拉格朗日力学

2.1　牛顿力学的局限性和分析力学的建立

我们在第一章讨论了牛顿力学。**牛顿力学是以牛顿定律和力的独立作用原理作为力学的基本原理。**这是在通常的三维空间中广泛应用矢量方法处理力学问题的一种力学体系，因而牛顿力学又称为**矢量力学**。如果质点的运动方式不很复杂，而且应用直角坐标系去描述，则运动方程往往是相当简单的。然而，如果取消了这两个限制中任何一个，则方程会变得非常复杂而难以计算。

在应用牛顿方法求解问题时，必须知道作用在物体上所有的力，这是因为出现在基本方程中的力是作用于物体上的合力。如果质点受到某种约束，例如被限制在某曲面或曲线上运动，不能脱离该线或该面而做任意运动并占据空间的任意位置，则叫**非自由质点**。此时该线或该面叫**约束**，而该线或该面的方程称为**约束方程**。关于约束问题 2.2 节还要做较为详细的阐述。

解约束运动的问题，一般都是将约束去掉而代之以**约束反作用力**，从而把它视为自由质点。与普通力不同，约束反作用力并不完全取决于约束本身，而与作用在质点上的其他力及质点本身运动状态等有关；而且，单靠约束反作用力本身并不能引起质点的任何运动。所以约束反作用力常称为**被动力或约束力**，不是约束力的那些力称为**主动力**。约束反作用力通常作用在质点和曲线或曲面的接触点上。在无摩擦的情况下，它沿着曲线或曲面的法线，而在有摩擦的情况下，则和法线成一定角度的倾斜。如令 $\boldsymbol{F}$ 代表主动力，$\boldsymbol{R}$ 代表约束反作用力，则质点的微分运动方程为

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},t)+\boldsymbol{R} \tag{2.1.1}$$

约束反作用力一般都是未知的。除了某些特殊情况，通常要得到约束力的显式是很困难的，甚至是不可能的。牛顿力学不能给出一套处理这种问题的一般而且有效的方法。18～19 世纪，随着工业革命的迅速发展，在工程技术上迫切需要解决的又正是这一类问题，因此，迫切需要寻求另外的力学方法。

此外，在自然界中，力学现象与非力学现象（例如电学、光学、波动力学及场的动力学等）在运动规律上都有内在联系。由于表达方法的不同，在显现它们之间的联系时，就有难易之分。牛顿力学作为经典力学的一种表述形式，虽然概括了经典力学的现象，但在当时的历史条件下，不可能过多考虑到力学现象与非

力学现象之间的联系。因此，从整个物理学的高度看，这种表述具有相当的局限性。

由于上述的诸多原因，很自然地就会促使人们探究力学的其他表述形式。1788年，拉格朗日的巨著《分析力学》问世，标志着分析力学的建立①。在这本著作中，完全用数学分析的方法来解决所有的力学问题，而无需借助以往常用的几何方法，全书一张图也没有。在此基础上，加上许多著名数学家和物理学家的努力，逐渐发展为一系列处理力学问题的新方法。在这种表述形式中，放弃了以牛顿定律作为力学的基本原理，从而也放弃了把单个粒子的质量、加速度和所受力作为力学中最基本的物理量，以及与此有关的三维空间中矢量方法，同时也放弃了把整个系统分解为单个粒子逐一相加的研究方法。新的表述形式把整个系统看作统一的对象，并用统一的方法加以研究，采用了整个物理学中所共有的基本物理量——能量或功——作为力学本身的基本物理量，并以此为根据，建立描述运动的基本方法。这种表述广泛采用广义坐标（及其广义速度或广义动量）来描述系统的运动状态。力学的这种表述形式称为**分析力学**。对分析力学作出重要贡献的有拉格朗日、哈密顿、庞加莱和李雅普诺夫等。由于分析力学所注重的不是力和加速度，而是具有更广泛意义的能量，同时又扩大了坐标的概念，因而使这种方法和结论更便于推广到场现象和物理学的其他领域（如量子力学、电动力学、统计力学、天体力学等），在理论上有着更重要的意义。

分析力学是经典力学的基石之一，是近代物理学发展的扶梯。同时，分析力学又是许多科学理论的发祥地和应用对象。很难指出物理数学科技的其他领域能够像分析力学这样把抽象的数学研究与具体的物理内容如此深刻地结合起来。分析力学不仅是自然和技术的最复杂、多方面问题科学研究的精美工具，而且运动规律的独特表达形式远远超出了经典力学的限制。

2.2 非自由质点系和约束

力学中很多问题（例如第一章研究过的那些问题）都归结为解运动方程

$$m_\alpha \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}_\alpha}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{F}_\alpha(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_N, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_N, t) \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots, N) \tag{2.2.1}$$

这里力看作是质点位置、速度以及时间的已知函数（以后我们把这种力简称为**主动力或给定的力**）；而且初始条件可以任意给定，即对初始条件不加任何限制。

① 分析力学中某些原理和方法的提出比拉格朗日《分析力学》一书的问世还要早，例如最小作用量原理就是莫培督在1774年提出的。

但是，在力学中还有另一类问题，在这类问题中，所要研究的力除了给定的力以外，还有一些力是质点的位置、速度以及时间的未知函数。

众所周知，一群质点的集合，如果其中有相互作用，以致其中每一质点的运动都与其他质点的位置和运动有关，则称这种质点的集合为质点系。而限制质点系中各质点的位置、速度和加速度的条件称为**约束**。约束可以通过场力、物体间的接触或通过物体各部分之间的内力作用来实现。实现约束的常见手段有各种物体的表面、杆件、柔索等。不受约束，可完全任意运动的质点系，称为**自由质点系**。如果忽略其他天体对太阳系的作用，把行星看作质点，则太阳系就是一个自由质点系。与此相反，受有约束而不能任意运动的质点系，称为**非自由质点系**。刚体就是其中任意两点之间的距离保持不变，从而维持整个刚体形状不变的非自由质点系。工程中所有的机器和机构都是非自由质点系。

自由质点系在主动力作用下可能在空间任意运动。在同样主动力的作用下，非自由质点系与自由质点系相比较，加在系统质点上的约束在某种程度上限制了系统的可能运动，约束是事先加上的限制，因此当系统运动时，不论作用在其上的力和运动的初始条件如何，这些限制都必须得到满足。

在一般情况下，约束就是对力学系统中各个质点的位置、速度和加速度所加的限制，而这些限制并不能从运动方程推出。约束可以解析地表示成**约束方程**，即表示成各质点的位矢、速度和加速度之间的关系式。约束物作用在系统中各质点上的力称为**约束反作用力**，常简称为**约束反力**。

根据约束对质点或质点系运动的限制条件的性质不同，约束可以分为以下几种形式：完整约束和不完整约束，单面约束和双面约束，稳定约束和不稳定约束。

所谓**完整（或可积）约束**，就是这种约束的约束方程总可以化为以下形式的方程

$$f(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_N,t)=0 \tag{2.2.2}$$

其中，f 仅是各质点的坐标及时间的函数。这种约束不仅限制了系统各质点的位置，而且限制了各质点的速度和加速度。实际上，将式（2.2.2）对时间求微商，我们就可以得到完整约束对质点速度的限制

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=\sum_{\alpha=1}^{N}(\nabla_\alpha f)\boldsymbol{v}_\alpha+\frac{\partial f}{\partial t}=0 \tag{2.2.3}$$

再将式（2.3.3）对时间求微商，就得到对质点加速度的限制

$$\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}t^2}=\sum_{\alpha=1}^{N}(\nabla_\alpha f)\boldsymbol{a}_\alpha+\sum_{\alpha=1}^{N}\left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(\nabla_\alpha f)\right]\boldsymbol{v}_\alpha+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f}{\partial t}=0 \tag{2.2.4}$$

完整约束的特征是，对质点加速度的限制可以化为仅仅是对质点位置的限制。换句话说，给定的式（2.2.3）和（2.2.4）是可积的。

完整约束又称**几何约束**。它的约束方程表现为坐标和时间的函数，如前述方程（2.2.2）的形式。当然它涵盖了约束方程只表现为坐标函数的情况，如

$$f(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_N)=0 \tag{2.2.5}$$

的形式，也是几何约束。

完整约束最明显的例子是质点被约束在某条曲线或曲面上的运动的情况，这时的约束方程是确定曲线或曲面的方程。

完整约束的最简单的例子也许是刚体，这时约束方程的形式是

$$(\boldsymbol{r}_\alpha-\boldsymbol{r}_\beta)^2-c_{\alpha\beta}^2=0$$

再如，设想一质点被约束在一刚性水平面上运动，此面又沿垂直方向以常速 u 移动，取 Oz 轴沿铅垂线方向，向上为正，于是可以写出约束方程

$$f=z-ut=0$$

显然可见，此约束是完整约束，对质点的位置、速度和加速度所加的限制是

$$z=ut,\qquad \dot{z}=u,\qquad \ddot{z}=0$$

如果约束方程不仅为坐标的函数，而且表现为速度的函数，例如

$$f(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_N,\dot{\boldsymbol{r}}_1,\dot{\boldsymbol{r}}_2,\cdots,\dot{\boldsymbol{r}}_N,t)=0 \tag{2.2.6}$$

称为**微分约束**，其含义是显而易见的，因为约束方程中除含有坐标本身以外，还有坐标的微分。微分约束也称**运动约束**。

微分约束有时经过积分后可变为几何约束。倘若它是不可积的，即式（2.2.6）的左边不是一个全微分，就称其为**不完整约束**。不完整约束是指这样一种约束，它们的方程不能化为仅仅含有质点坐标和时间的方程。在不完整约束中，最熟悉的是以下形式的不可积约束

$$\sum_{\alpha=1}^{N}(\boldsymbol{b}_\alpha\cdot\boldsymbol{v}_\alpha)+d=0 \tag{2.2.7}$$

也就是约束方程是速度的线性一次方程，式中 b_α 和 d 可能与各个质点的位置和时间有关，例如一般说来，对沿着粗糙表面滚动的小球所施加约束就是不完整约束。另外，有关各种物体的最佳轨道问题是一种很有实际意义的不完整约束问题。气体容器壁也是一种不完整约束。

今后我们将主要研究完整约束，因为不完整约束系统的运动问题，通常在数学上是很繁难的，而且在现代物理学应用中遇到不完整约束的问题也较少。

如果约束中不显含时间，那么这种约束称为**稳定约束**。反之，如果约束是时间的函数，则约束方程就显含时间，那么这种约束称为**不稳定约束**。

例如，当一质点和长为 l 的刚性杆相连时，如刚性杆的上端固定不动，取此点为坐标原点，则约束方程是

$$x^2+y^2+z^2=l^2$$

这就是稳定约束。如杆的上端沿水平直线以匀速 c 运动，并取该直线上某定点为

坐标原点，则约束方程将是

$$(x-ct)^2+y^2+z^2=l^2$$

这就是不稳定约束。

约束又可分为**单面约束**与**双面约束**。质点始终不能脱离的那种约束，叫双面约束，又称不可解约束。例如，质点被约束在曲面

$$f(x,y,z)=0 \qquad 或 \qquad f(x,y,z,t)=0$$

上，并且始终不能脱离这个曲面，那么这种约束就是双面约束。如果质点虽然被约束在某一曲面上，但在某一方面可以脱离，这种约束就叫单面约束，也称可解约束。例如，在有下列约束时

$$f(x,y,z)\leqslant c$$

质点可以在曲面 $f(x,y,z)=c$ 上，也可以在 $f(x,y,z)<c$ 的方向上离开这一曲面。因此，双面约束以等式表示，而单面约束以不等式表示。

例如，当质点被一柔索连在一个定点 O 上而做任意运动时，所受的约束是单面约束。因为这时质点只被限制不能离开定点 O 超过 l 的位置，但可以往里面运动，使距离小于 l。若取定点 O 为坐标原点，则约束方程是

$$x^2+y^2+z^2\leqslant l^2$$

如果质点是用刚性杆和定点 O 相连，则质点所受的约束是不可解约束，约束方程将是

$$x^2+y^2+z^2=l^2$$

除了前面所讲那种不完整约束外，不能用等式表示的单面约束是另一种不完整约束。除了这两种约束而外，其他约束都是完整约束。

凡只受有完整约束的力学系统叫**完整系**。同时受有完整约束与不完整约束的力学系统，或只受有不完整约束的力学系统，都叫**不完整系**。

引入约束和约束反力概念，使我们可以把受有完整约束的包含 N 个非自由质点的系统的力学基本问题，化为根据已知的力 $\boldsymbol{F}_\alpha$（$\alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ N$）和已知的 k 个完整约束方程来求解质点系的运动规律和约束反力的问题。而这一问题又归结为，在给出符合约束方程的初始条件下，联立求解运动方程和约束方程的问题，即联立求解

$$\left.\begin{aligned} &m_\alpha\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_\alpha}{\mathrm{d}t^2}=\boldsymbol{F}_\alpha+\boldsymbol{R}_\alpha \qquad (\alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ N)\\ &f_\mu(\boldsymbol{r}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_N,t)=0 \qquad (\mu=1,2,\cdots,k)\end{aligned}\right\} \tag{2.2.8}$$

方程组（2.2.8）是 $3N+k$ 个标量方程，并含有 $6N$ 个未知数［指各个位矢 $\boldsymbol{r}_i$ 和约束反力 $\boldsymbol{R}_\alpha(t)$（$\alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ N$）在坐标轴上的投影］，其中最有意义的是约束数 $k<3N$，那么只有当质点位置和约束反力之间的 $6N-(3N+k)=3N-k$ 个的关系已知时，我们所研究的问题才是确定的。

2.3 广义坐标

一个质点在空间的位置由其位矢 $\boldsymbol{r}$ 确定。为了确定 N 个质点组成的系统在空间的位置，应给定 N 个位矢，即 $3N$ 个坐标。一般把能够单值确定一个系统的位置所必须给出的独立量的数目，叫做系统**自由度**的数目，在上述情况下，自由度的数目等于 $3N$。在力学系统只受几何约束的情形下，独立坐标的数目就是系统自由度的数目。但对微分约束而言，自由度的数目则可能小于独立坐标的数目。我们主要研究几何约束的情况。

对于 N 个质点所组成的力学系统，如果有 k 个几何约束

$$f_\mu(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_\alpha,\cdots,\boldsymbol{r}_N;t) \qquad (\mu=1,2,\cdots,k) \tag{2.3.1}$$

为书写方便，上式经常简写为

$$f_\mu(\boldsymbol{r},t)=0 \qquad (\mu=1,2,\cdots,k) \tag{2.3.2}$$

于是，独立坐标的数目就减少为 $3N-k$ 个。则自由度数

$$s=3N-k \tag{2.3.3}$$

这些独立量不一定是质点的笛卡儿坐标，有时选择某一种其他坐标可能会更加方便。于是，人们便提出了广义坐标的概念。足以描述（具有 s 个自由度的）系统位置的任意量 q_1，q_2，…，q_s 叫该系统的**广义坐标**，而其对时间的微商 $\dot{q}_1$，$\dot{q}_2$，…，$\dot{q}_s$，则是其**广义速度**。

这里“坐标”一词的含义已超出几何学的范畴，它的真正含义就是“独立参量”。在力学中，广义坐标概括了各式各样的“坐标”，它可以是线量，也可以是角量或其他物理量，如面积、体积、电极化强度、磁化强度等等。相应地，广义速度既可以是线速度，也可以是角速度，或者其他物理量对时间的变化等。所谓系统的位置，同样也超出几何的范畴，而是泛指系统的某种状态。

选取广义坐标要满足两个要求：第一，所有质点的位矢在每一时刻都可以表示成广义坐标 q 的函数，即

$$\boldsymbol{r}_\alpha=\boldsymbol{r}_\alpha(q,t) \tag{2.3.4}$$

式中，q 是 q_1，q_2，…，q_s 的缩写。这些函数还应该是单值连续的，一般地还显含时间。第二，对所有的 q 值，约束方程（2.3.2）都应满足，即将函数（2.3.4）代入方程（2.3.2）能得到一组 k 个方程

$$f_\mu[\boldsymbol{r}_\alpha(q,t),t]=0 \qquad (\mu=1,2,\cdots,k) \tag{2.3.5}$$

为了描述一个系统，广义坐标的选择并不是唯一的。一般地说，有许多组广义坐标（事实上数目是无限多!）都可以完全确定一个给定系统的状态。因此在选取广义坐标时，需根据具体问题，选以能够突出其性质，并且在形式上最简

单。一组特定的广义坐标“合适”与否的最终检验是看得出的运动方程是否足够简单，从而可做直截了当的解释。可惜，还没有一个普遍的规律可循能够说明如何对一个给定的问题选择一组“最合适”的广义坐标；一定程度的技巧还须通过例题去体会，通过多做练习积累经验来培养。

我们也可以借用几何表示法讨论力学系统的运动状态。众所周知，三维空间中的一个点可以由三个笛卡儿坐标 x_1，x_2，x_3 来确定。与此类比，我们可以把 s 个广义坐标 q 所确定的 s 维空间叫做**位形空间**。把整个质点系代之一 s 维空间一个特定的“位形点”，或者简称为“点”，而位形点的运动就代表整个质点系的运动。位形点在位形空间中的“路径”称为**位轨线**。

如果考虑到联系直角坐标和广义坐标的方程中含有时间的可能性，则变换方程组由下式给出

$$\begin{aligned} x_{\alpha,j} &= x_{\alpha,j}(q_1,q_2,\cdots,q_i,\cdots,q_s,t) \\ &= x_{\alpha,j}(q,t) \qquad (\alpha=1,2,\cdots,N;i=1,2,\cdots,s;j=1,2,3) \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

一般来说，速度的直角坐标分量依赖于广义坐标、广义速度和时间

$$\dot{x}_{\alpha,j} = \dot{x}_{\alpha,j}(q,\dot{q},t) \tag{2.3.7}$$

还可以写出逆变换如下

$$q_i = q_i(x_{\alpha,j},t) \qquad (i=1,2,\cdots,s;j=1,2,3) \tag{2.3.8}$$

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(x_{\alpha,j},\dot{x}_{\alpha,j},t) \qquad (i=1,2,\cdots,s;j=1,2,3) \tag{2.3.9}$$

另外，还有 $k=3N-s$ 个以下形式的约束方程

$$f_\mu = f_\mu(x_{\alpha,j},t) \qquad (\mu=1,2\cdots,k) \tag{2.3.10}$$

2.4 变 分 法

2.4.1 变分法的基本问题

变分法在物理学中颇为重要，尤其在场现象的理论中显得更为突出。尽管这一课题已属后继课程的内容，但是为了更加广泛地讨论动力学，现阶段打下基础还是十分必要的。

变分法的基本问题是要确定函数 $y(x)$，从而使积分

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f\{y(x),y'(x),x\}\mathrm{d}x \tag{2.4.1}$$

具有极值（极大值或极小值。物理上的问题几乎都是极小值）。式中 $y'(x) \equiv \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，$y(x)$ 称为**应变量**。由于量 f 依赖于应变量$y(x)$的函数形式，称为**泛函**。泛

函 f 视为已知且积分限是固定的[①]；而函数 $y(x)$ 则要加以改变，直到 J 获得极值。这在物理上相当于我们要找一条特殊的路径，这条路径就是物理运动真实路径。

函数 $y(x)$ 给出积分 J 一个极小值的含义是什么？这就是说，任何**邻域函数**，无论怎么接近 $y(x)$，都必须使 J 的值增加。所谓邻域函数可以这样定义：我们给出所有可能的函数 y 一个参数表达式

$$y = y(\alpha, x) \tag{2.4.2}$$

使得当 $\alpha = 0$ 时

$$y = y(0, x) = y(x) \tag{2.4.3}$$

就是使 J 具有极值的函数。于是可以看出

$$y(\alpha, x) = y(0, x) + \alpha\eta(x) \tag{2.4.4}$$

式中，$\eta(x)$ 为某一辅助函数，它在 $x = x_1$ 和 $x = x_2$ 处为零（见图2.1），这是因为在路径的端点参变函数 $y(\alpha, x)$ 必须与 $y(x)$ 恒等，所以 $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$。$y(\alpha, x)$表示用无限小参量 α 标记的某组特定的相邻路径，而$y(0, x)$表示真实路径。为简单起见，假定真实路径 $y(x)$ 和辅助函数 $\eta(x)$ 都是良性函数——在 x_1 和 x_2 之间是连续和非奇异的，并在这相同的区间内有连续的一阶和二阶微商。对于式（2.4.4）给出的那种类型的函数，积分 J 也就成为参数α 的函数

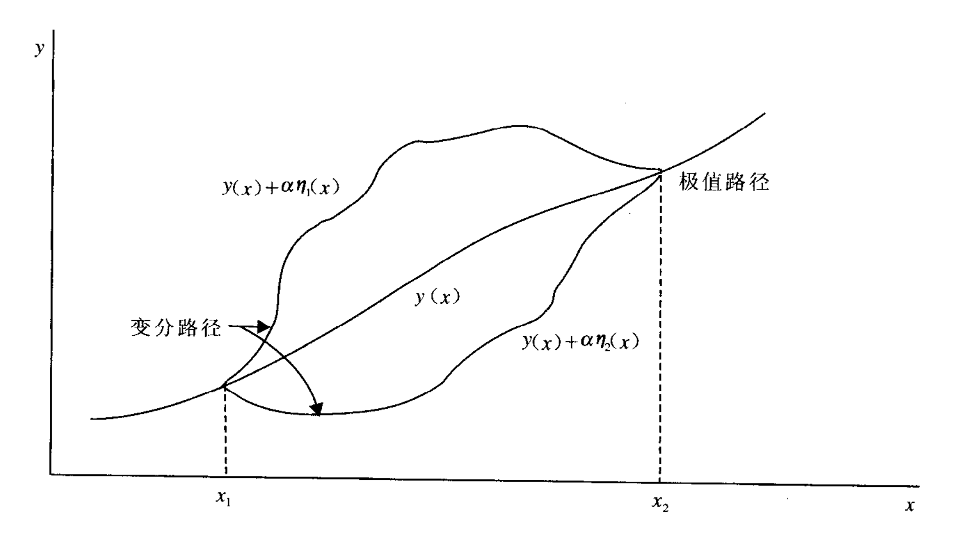


图 2.1 极值路径示意图

---

① 积分限并不必须视为固定的。如果它们可以变，问题就扩大为不仅找 $y(x)$，而且还要找 x_1 和 x_2，以使 J 为极值。

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f\{y'(\alpha, x), x\} \mathrm{d}x \tag{2.4.5}$$

该积分具有极值的条件就是 J 的一阶微商不依赖于 α，或者对于所有的函数 $\eta(x)$ 均有

$$\left.\frac{\partial J}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = 0 \tag{2.4.6}$$

这仅是必要条件。充分条件十分复杂，我们在此不拟讨论，读者欲知其详，可参考变分法教程。

2.4.2 欧拉－拉格朗日方程

采用常用的积分号下微分法，对式（2.4.5）求偏微商，由于积分限是固定的，微分运算仅影响被积函数

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial \alpha} &= \frac{\partial}{\partial \alpha}\int_{x_1}^{x_2} f\{y, y', x\} \mathrm{d}x \\
&= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial \alpha} f\{y, y', x\} \mathrm{d}x \\
&= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \alpha} \right) \mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{2.4.7}$$

由式（2.4.4）可得

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial y}{\partial \alpha} = \eta(x) \\
&\frac{\partial y'}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial x}\eta(x) = \frac{\mathrm{d}\eta(x)}{\mathrm{d}x}
\end{aligned}\right\} \tag{2.4.8}$$

于是式（2.4.7）变为

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y}\eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\mathrm{d}\eta(x)}{\mathrm{d}x} \right] \mathrm{d}x \tag{2.4.9}$$

大家知道，分部积分的法则是

$$\int u \mathrm{d}v = uv - \int v \mathrm{d}u$$

式（2.4.9）的第二项可以用分部积分法积出

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\mathrm{d}\eta(x)}{\mathrm{d}x} \mathrm{d}x = \left.\frac{\partial f}{\partial y'}\eta(x)\right|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\eta(x)\mathrm{d}x$$

因为 $\eta(x_1) = \eta(x_2)$，所以上式中积出的项为零，所以

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\mathrm{d}\eta(x)}{\mathrm{d}x} \mathrm{d}x = -\int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\eta(x)\mathrm{d}x \tag{2.4.10}$$

于是，式（2.4.7）变为

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha}=\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\eta(x)\mathrm{d}x \tag{2.4.11}$$

式(2.4.11)的积分现在看起来不依赖于 α,然而,f 对其取偏微商的函数 y 和 y' 都仍是 α 的函数。不过当 $\alpha=0$ 时，$y(\alpha,x)=y(0,x)=y(x)$，即不再依赖于 α。

由式（2.4.6）知，$\left.\frac{\partial J}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0}$ 必须为零，并且由于 $\eta(x)$ 是一任意函数（在上面所说的条件下），所以，当参数 $\alpha=0$ 时，被积函数自身必为零，从而得到

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial y'}=0 \tag{2.4.12}$$

这里，y 和 y' 是原来的函数，与参数 α 无关。这个结果就是数学上著名的**欧拉方程**。这个方程用于物理系统时，称为**欧拉－拉格朗日方程**。它是泛函数积分式（2.4.1）取极值的必要条件。

2.4.3 多应变量泛函

前面讨论了 f 仅为单应变量 $y(x)$ 的泛函的情形，在力学中遇到的更普遍情形是 f 为多应变量的泛函

$$f=f\{y_1(x),y_1'(x),y_2(x),y_2'(x),\cdots,x\} \tag{2.4.13a}$$

或简单写为

$$f=f\{y_i(x),y_i'(x),x\} \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{2.4.13b}$$

类似于式（2.4.4），可以写出

$$y_i(\alpha,x)=y_i(0,x)+\alpha\eta_i(x) \tag{2.4.14}$$

用完全类似的步骤可得

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha}=\int_{x_1}^{x_2}\sum_i\left(\frac{\partial f}{\partial y_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial y_i}\right)\eta_i(x)\mathrm{d}x \tag{2.4.15}$$

由于各个变分都是独立的，即所有的 $\eta_i(x)$ 都是线性无关的，要求方程（2.4.14）在 $\alpha=0$ 时为零，就是要求括号中的每个式子分别为零，即

$$\frac{\partial f}{\partial y_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial y_i'}=0 \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{2.4.16}$$

方程（2.4.16）就是多应变量的欧拉方程，或者说是多应变量的欧拉－拉格朗日方程。

2.4.4 变分记号

在应用变分法的分析中，常用一个简便的符号 δ 来表示变分。下面我们就是讨论这个记号是如何引入的。

式（2.4.11）为

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\frac{\partial y}{\partial \alpha}\mathrm{d}x$$

上式可以写作

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha}\mathrm{d}\alpha = \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\frac{\partial y}{\partial \alpha}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}x \tag{2.4.17}$$

若引入记号

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial J}{\partial \alpha}\mathrm{d}\alpha \equiv \delta J\\ \frac{\partial y}{\partial \alpha}\mathrm{d}\alpha \equiv \delta y\end{aligned}\right\} \tag{2.4.18}$$

则式（2.4.17）可以表示为

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\delta y\mathrm{d}x \tag{2.4.19}$$

于是，极值条件变为

$$\delta J = \delta\int_{x_1}^{x_2} f\{y(x), y'(x), x\}\mathrm{d}x = 0 \tag{2.4.20}$$

下面我们直接用变分法推导欧拉方程。在推导之前，我们先来证明变分运算和微分运算之间的一个重要关系。

假设自变量 x 经一微变化，改变为

$$\bar{x} = x + \delta x \tag{2.4.21}$$

相应地，函数 y 改变为

$$\bar{y} = y + \delta y \tag{2.4.22}$$

也是微变化。为了避免与用撇表示对 x 求微商相混淆，这里用在字母上画一横表示变化了的量，对式（2.4.22）求微商得

$$\bar{y}' = y' + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\delta y) \tag{2.4.23}$$

从另一方面看，在自变量 x 经一微变化时，导函数 $\bar{y}'$ 的变化也是微变化，即

$$\bar{y}' = y' + \delta y' = y' + \delta\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) \tag{2.4.24}$$

将式（2.4.23）与（2.4.24）比较可得

$$\delta\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\delta y) \tag{2.4.25}$$

上式表明，变分和微商运算次序可以交换。

变分运算的许多法则都和微分相同，例如

$$\left.\begin{aligned}\delta(A+B)&=\delta A+\delta B\\ \delta(AB)&=A\delta B+B\delta A\\ \delta\left(\frac{A}{B}\right)&=\frac{B\delta A-A\delta B}{B^2}\end{aligned}\right\} \tag{2.4.26}$$

现在我们根据用变分符号写出的极值条件式（2.4.20）推导欧拉方程。我们把式（2.4.20）中的变分符号 δ 移入积分号内（因为已经假定积分限并不受变分的影响）。得到

$$\delta J=\int_{x_1}^{x_2}\delta f\mathrm{d}x=\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\delta y+\frac{\partial f}{\partial y'}\delta y'\right)\mathrm{d}x \tag{2.4.27}$$

由式（2.4.25）知

$$\delta y'=\delta\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\delta y)$$

所以

$$\delta J=\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\delta y+\frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\delta y\right)\mathrm{d}x \tag{2.4.28}$$

和前面的做法一样，对上式的第二项分部积分

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{\delta f}{\delta y'}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\delta y\mathrm{d}x=\frac{\delta f}{\delta y'}\delta y\Bigg|_{x_1}^{x_2}-\int_{x_1}^{x_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\delta y\mathrm{d}x=-\int_{x_1}^{x_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\delta y\mathrm{d}x \tag{2.4.29}$$

在上式的推导中用到了在 x_1 和 x_2 点 $\delta y=0$ 的基本假设。于是式（2.4.28）变为

$$\delta J=\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\delta y\mathrm{d}x \tag{2.4.30}$$

由于变分 δy 是任意的，极值条件 $\delta J=0$ 即要求被积函数为零，从而导出欧拉方程（2.4.12）。

2.4.5 实例

现在我们应用欧拉方程（2.4.12）来处理几个经典范例。

1. 平面上两点间的最短距离

平面上的弧元长度为

$$\mathrm{d}s=\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2} \tag{1}$$

P_1，P_2 两点间任一曲线的总长度为

$$J=\int_{P_1}^{P_2}\mathrm{d}s=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\mathrm{d}x \tag{2}$$

要求曲线是一最短路径的条件是 J 为一极小值。这是式（2.4.1）所示极值问题的一个例子，这里的函数

$$f=\sqrt{1+y'^2} \tag{3}$$

求出该函数对 y 和 y' 的偏微商

$$\frac{\partial f}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial f}{\partial y'}=\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

将上二式代入式（2.4.12）即得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}=0$$

或者

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}=c \tag{4}$$

式中，c 为一常数。要这个解能适用，必须有

$$y'=a \tag{5}$$

式中，a 是一常数，它与 c 的关系为

$$a=\frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \tag{6}$$

显然，式（5）就是直线方程

$$y=ax+b \tag{7}$$

式中，b 是另一积分常数。严格说来，我们仅仅证明了这条直线是一极值路径，但它在这个问题中显然还是一个极小值，a 和 b 这两个积分常数决定于曲线通过两个端点（x_1，y_1）和（x_2，y_2）的条件。

同样，若用球面上位置的角度坐标表示球面弧长，即能得到球面上两点间的最短距离。一般地讲，任意两点之间沿某约束面的最短路径称为**短程线**。

2. 最速路径

这是另一个应用变分法很容易求解的经典问题。考虑一质点在恒定力场中由静止开始从一点（x_1，y_1）运动到较低的一点（x_2，y_2）。这个问题是要找出一条连接两点的曲线，使一个质点在重力作用下，从静止开始沿这曲线由较高点移向较低点的时间为最短。选坐标系时可使（x_1，y_1）位于原点，并且让力场沿 x 轴的正方向，如图 2.2 所示。

由于作用在质点上的力是恒力，如果忽略空气阻力，则是保守场，质点的总

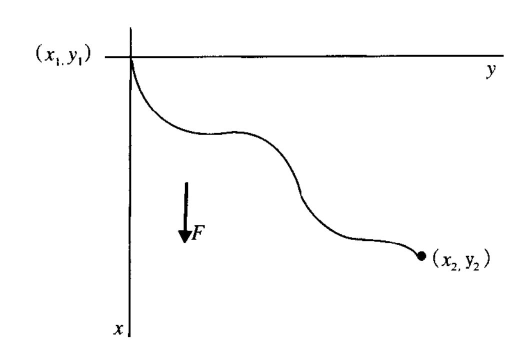


图 2.2 质点的最速落径

能量为 $T+U=$ 常数。若选 $x=0$ 点为势能的零点，即 $U|_{x=0}=0$，则由于质点从静止开始下落，所以 $T+U=0$。动能为 $T=\frac{1}{2}mv^2$，势能为 $U=-Fx=-mgx$，这里 g 是由外力即重力引起的加速度。因此，质点的能量守恒定律可表示为

$$\frac{1}{2}mv^2=mgx$$

由此得

$$v=\sqrt{2gx} \tag{1}$$

质点从原点运动到（x_2，y_2）所需的时间为

$$\begin{aligned} t &= \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} \frac{\mathrm{d}s}{v} = \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} \frac{(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2)^{1/2}}{(2gx)^{1/2}} \\ &= \int_{x_1=0}^{x_2} \left(\frac{1+y'^2}{2gx}\right)^{1/2} \mathrm{d}x \end{aligned} \tag{2}$$

我们希望运行时间这个量达到最小值。由于常数（$2g$）$^{\frac{1}{2}}$不影响最后的方程。泛函 f 可以确定为

$$f=\left(\frac{1+y'^2}{x}\right)^{1/2} \tag{3}$$

并且由于$\frac{\partial f}{\partial y}=0$，欧拉方程成为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial y'}=0$$

或者

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = 常数 = (2a)^{-1/2} \tag{4}$$

将式（3）对 y'微商，并将所得结果平方得

$$\frac{y'}{x(1+y')} = \frac{1}{2a} \tag{5}$$

上式经简单的运算，可化成如下的形式

$$y = \int \frac{x\mathrm{d}x}{(2ax - x^2)^{1/2}} \tag{6}$$

做变量变换，引入参数 θ

$$\left.\begin{aligned} x &= a(1-\cos\theta) \\ \mathrm{d}x &= a\sin\theta\mathrm{d}\theta \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

则积分变为

$$y = \int a(1 - \cos\theta)\ \mathrm{d}\theta$$

因而

$$y = a(\theta - \sin\theta) + c \tag{8}$$

然而，过原点的旋轮线的参数方程为

$$\left.\begin{aligned} x &= a(1-\cos\theta) \\ y &= a(\theta-\sin\theta) \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

这正是所求之解。因此，积分常数为零。这个路径如图 2.3 所示。常数 a 的值应使旋轮线通过给定点（x_2，y_2）。最速路径问题的解的确给出了质点运行时间最短的路径。

最速路径问题是数学史上重要的一页，正是由于伯努利对这个问题的分析，才使得变分计算得以正式创立。

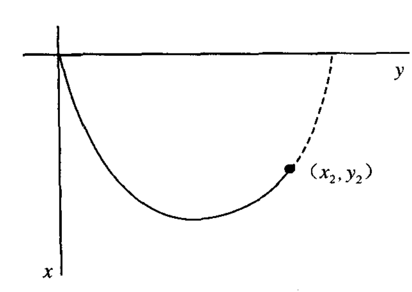


图 2.3　旋轮线

2.5　最小作用量原理

2.5.1　最小作用量原理

力学系统运动规律的最一般的形式可以由所谓**最小作用量原理**（或者**哈密顿原理**）给出。这一原理在理论物理的其他部分也有着广泛的应用。根据这一原理，每一力学系统由一定的函数

$$L\ (q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_s,\ \dot{q}_1,\ \dot{q}_2,\ \cdots,\ \dot{q}_s,\ t)$$

来描述其特性。为书写方便，经常简写为

$$L\ (q,\ \dot{q},\ t)$$

而系统的运动满足下面所述的条件。假定在 $t=t_1$ 和 $t=t_2$ 的时刻，系统占有两个确定的位置，这两个位置分别由两组坐标 $q^{(1)}$和 $q^{(2)}$决定。这时，系统在两个位置之间按照使积分

$$S=\int_{t_1}^{t_2}L(q,\dot{q},t)\mathrm{d}t \tag{2.5.1}$$

有最小值① 的方式运动。借助变分学的方法，最小作用量原理可以表述为

$$\delta S=\delta\int_{t_1}^{t_2}L(q,\dot{q},t)\mathrm{d}t=0 \tag{2.5.2}$$

函数 L 叫做该系统的**拉格朗日函数**，而积分式（2.5.1）则叫做**作用量**。我们要特别指出，这个原理的变分表述仅要求 S 是极值，并不必须是**极小值**，但是几乎在力学的所有重要应用中，都得到极小的条件。

参照 2.4 节的讨论，显然我们得到确定积分式（2.5.1）最小值的 s 个微分方程

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=0 \qquad (i=1,2,\cdots,s) \tag{2.5.3}$$

这就是要找的微分方程，在力学里它们叫**拉格朗日方程**，更确切地说，叫做**完整保守系拉格朗日方程**。假定所给定的拉格朗日函数已经知道，则方程（2.5.3）确定加速度、速度和坐标间的关系，也就是说，它们是系统的运动方程。

从数学观点来看，方程（2.5.3）是组成 s 个未知数$q_i(t)$的 s 个二阶方程的方程组。这个方程组的普遍解包含 $2s$ 个任意常数。为了确定这些常数，从而完全确定力学系统的运动，还必须知道描述系统在某一给定时刻状态的初始条件，例如知道所有坐标和速度的初值。

拉格朗日函数 $L(q,\dot{q},t)$ 仅仅包含 q 和$\dot{q}$，而不包含更高级的微商 $\ddot{q},\dddot{q},\cdots$，这一情况说明了力学状态完全由给定的坐标与速度确定。这正是在前面已经提到过的事实。

2.5.2 拉格朗日函数的可加性

假定力学系统由 A 和B 两部分组成，并且每一部分都是封闭的，因而分别有拉格朗日函数 L_A 和L_B。这时在极限情形下，若两部分相距很远，以致于它们之间的相互作用可以忽略不计时，整个系统的拉格朗日函数趋向极限

① 这样表述的最小作用量原理，对于全部运动轨道整体来说，并不是任何时候都是正确的。对于全部轨道，积分式（2.5.1）可能只有极值而不一定有极小值。但是，这一情况在推导运动方程时并无多大关系，因为它仅仅应用了极值条件。

$$\lim L = L_A + L_B \tag{2.5.4}$$

拉格朗日函数的可加性本身表明：没有相互作用的诸部分中的任一部分的运动方程不可能包含属于系统另外部分的量。

显然，将力学系统的拉格朗日函数乘上一个任意常数并不会在运动方程上反映出来。从这里好像会得出一种不确定性，不同的独立系统的拉格朗日函数可以乘上任意不同的常数。可加性消除了这一不确定性，因为它只允许对所有系统的拉格朗日函数同时乘上同一常数，而这不过是归结为选择这一物理量度量单位的任意而已。

2.5.3 拉格朗日函数的非唯一性

我们还要说明，系统的拉格朗日函数并不是唯一的。我们来研究两个函数 $L'(q,\dot{q},t)$ 和 $L(q,\dot{q},t)$，它们二者相差任意一个坐标与时间的函数 $f(q,t)$ 对时间的全微商

$$L'(q,\dot{q},t) = L(q,\dot{q},t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(q,t) \tag{2.5.5}$$

利用这两个函数所计算出来的积分式（2.5.1）由下述关系联系

$$\begin{aligned} S' &= \int_{t_1}^{t_2} L'(q,\dot{q},t)\mathrm{d}t \\ &= \int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(q,t)\mathrm{d}t \\ &= S + f(q^{(2)},t_2) - f(q^{(1)},t_1) \end{aligned}$$

也就是说，积分 S' 和 S 相差一附加项，当对附加项进行变分运算时将为零。因此，条件 $\delta S' = 0$ 与条件 $\delta S = 0$ 一致，从而运动方程的形式并不改变。可见，**确定拉格朗日函数的准确度是到可以加上时间和坐标的任意数的全微商**。这个结论很重要，在许多问题的分析中都会用到的。

2.6 自由质点的拉格朗日函数

大家知道，惯性系统是这样的系统，相对于它来说，空间是均匀和各向同性的，而时间也是均匀的。关于在惯性系统内自由运动着的质点的拉格朗日函数的形式，从惯性系统时空的性质，立刻可以得出一些结论。空间和时间的均匀性表明，拉格朗日函数既不能显含质点的位矢 $\boldsymbol{r}$，也不能显含时间 t，也就是说，L 只是速度的函数。由于空间的各向同性，拉格朗日函数也不可能与速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 的方向有关。因此，拉格朗日函数仅仅是速度绝对值的函数，即速度平方 $\boldsymbol{v}^2 = v^2$ 的函数

$$L = L(v^2) \tag{2.6.1}$$

由于拉格朗日函数与 $\boldsymbol{r}$ 无关，从而有

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}} = 0$$

因此，拉格朗日方程有如下形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} = 0$$

由此得$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}}$ = 常数。但由$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}}$只是速度平方的函数，因此得到

$$\boldsymbol{v} = \mathrm{const} \tag{2.6.2}$$

可见，在惯性系内，一切自由运动都以大小和方向皆不变的速度运动。特别值得注意的是，惯性系里某一时刻静止的自由运动将永远静止。这就构成了牛顿第一定律的内容。

下面我们利用伽利略相对性原理来考察相对于惯性系统自由运动的质点的拉格朗日函数的形式。假定惯性坐标系 K 以无限小的速度 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 相对于惯性坐标系 K' 运动，则

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\varepsilon} t \tag{2.6.3}$$

将上式对时间微商得

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{2.6.4}$$

经过这样的变换，拉格朗日函数 $L(v^2)$ 变为函数 L'。由于运动方程在所有惯性坐标系中应该具有相同的形式，所以，经过变换后的 L'如果不同于$L(v^2)$，最多也只能相差一个坐标与时间函数的全微商。

经过式（2.6.3）变换后的拉格朗日函数 L'为

$$L' = L(v'^2) = L(v^2 + 2\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\varepsilon} + \varepsilon^2) \tag{2.6.5}$$

将这一表达式按 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 指数展开成级数，并忽略高级无穷小得

$$L(v'^2) = L(v^2) + \frac{\partial L}{\partial v^2} 2\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\varepsilon} \tag{2.6.6}$$

等式右方的第二项只有在它线性地依赖于 $\boldsymbol{v}$ 的情况下才是时间的全微商。因此，$\frac{\partial L}{\partial v^2}$与速度无关，也就是说，在所研究的情况下，拉格朗日函数与速度平方成正比

$$L = av^2 \tag{2.6.7}$$

式中，a 为常数。

当进行速度的无限小变换时，上述形式的拉格朗日函数满足伽利略相对性原理，由此可以直接得出结论：在坐标系 K 以有限速度 $\boldsymbol{V}$ 运动的情况下，拉格朗日函数不变。实际上

$$L' = av'^2 = a \ (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{V})^2 = av^2 + 2a\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{V} + aV^2$$

或者把上式写成

$$L' = L + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2a\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{V} + aV^2 t) \tag{2.6.8}$$

第二项是全微商，因此可以去掉。

常数 a 一般用$\frac{m}{2}$表示，所以自由运动着的质点的拉格朗日函数最后写成

$$L = \frac{mv^2}{2} \tag{2.6.9}$$

量 m 称为质点的**质量**。由于拉格朗日函数的可加性，对于没有相互作用的质点所组成的质点系统，则有

$$L = \sum_{\alpha} \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2} \tag{2.6.10}$$

在 2.5 节我们曾经指出，给拉格朗日函数乘以任意常数，并不会在运动上反映出来。对于式（2.6.10）这样乘就相当于质量度量单位的改变。但是，当单位改变时，不同质点的质量间的比例关系并不改变，也正因为如此，质点的质量才具有实在意义。

在此我们还要指出，**质量不可能是负值**。事实上，根据最小作用量原理，对于质点从空间点 P_1 和 P_2 的真实运动，积分

$$S = \int_{P_1}^{P_2} \frac{mv^2}{2} \mathrm{d}t \tag{2.6.11}$$

具有极小值。假设质点沿着轨道很快离开点 P_1，然后很快地靠近 P_2，如果说质量是负的，则对于这样的轨道，作用量积分可以取任意大的负值，也就是说不可能有极值。这和积分式（2.6.11）应该有极小值相矛盾。所以质量不可能是负值。

值得指出，由于

$$v^2 = \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{\mathrm{d}s^2}{\mathrm{d}t^2} \tag{2.6.12}$$

因此，为写出拉格朗日函数，需要在相应的坐标系中找到弧元的平方。正因为如此，我们在 1.3 节把常用坐标系的弧元平方都给出了。例如，在笛卡儿坐标系中

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x_1^2 + \mathrm{d}x_2^2 + \mathrm{d}x_3^2$$

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) \tag{2.6.13}$$

在柱面坐标系中

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\rho^2 + \rho^2 \mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}z^2$$

$$L^2 = \frac{m}{2} \ (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) \tag{2.6.14}$$

在平面极坐标系中

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta$$

$$L = \frac{m}{2}\ (\dot{r}^2 + r^2\ \dot{\theta}^2) \tag{2.6.15}$$

在球面坐标系中

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2$$

$$L = \frac{m}{2}\ (\dot{r}^2 + r^2\ \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta \dot{\varphi}^2) \tag{2.6.16}$$

2.7 欧拉动能定理

在静止的直角坐标系中，动能可以表示为 $\dot{x}_{\alpha,j}$ 的二次齐次函数

$$T = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{1}{2} m_\alpha \dot{x}_{\alpha,j}^2 \tag{2.7.1}$$

如果描述运动的不是直角坐标，而是广义坐标，那么我们就需要确定动能 T 对于广义坐标和广义速度的依赖关系。由式（2.3.6）知，联系直角坐标与广义坐标的方程为

$$x_{\alpha,j} = x_{\alpha,j}(q, t) \tag{2.7.2}$$

式中，q 是 $q_1, q_2, \cdots, q_i, \cdots, q_s$ 的缩写。因此

$$\dot{x}_{\alpha,j} = \sum_{i=1} \frac{\partial x_{\alpha,j}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial x_{\alpha,j}}{\partial t} \tag{2.7.3}$$

计算 $\dot{x}_{\alpha,j}$ 的平方值

$$\dot{x}_{\alpha,j}^2 = \sum_{i,k}^{s} \frac{\partial x_{\alpha,j}}{\partial q_i} \frac{\partial x_{\alpha,j}}{\partial q_k} \dot{q}_i \dot{q}_k + 2 \sum_{i} \frac{\partial x_{\alpha,j}}{\partial q_i} \frac{\partial x_{\alpha,j}}{\partial t} \dot{q}_i + \left(\frac{\partial x_{\alpha,j}}{\partial t} \right)^2 \tag{2.7.4}$$

于是动能变为

$$\begin{aligned} T = & \sum_{\alpha}^{N} \sum_{j}^{3} \sum_{i,k}^{s} \frac{1}{2} m_\alpha \frac{\partial x_{\alpha,j}}{\partial q_i} \frac{\partial x_{\alpha,j}}{\partial q_k} \dot{q}_i \dot{q}_k \\ & + \sum_{\alpha}^{N} \sum_{j}^{3} \sum_{i,k}^{s} m_\alpha \frac{\partial x_{\alpha,j}}{\partial q_i} \frac{\partial x_{\alpha,j}}{\partial t} \dot{q}_i \\ & + \sum_{\alpha}^{N} \sum_{j}^{3} \frac{1}{2} m_\alpha \left(\frac{\partial x_{\alpha,j}}{\partial t} \right)^2 \end{aligned} \tag{2.7.5}$$

若采用简单的记号，可得普遍结果如下

$$T = \sum_{i,k} a_{ik} \dot{q}_i \dot{p}_k + \sum_{i} b_i \dot{q}_i + c \tag{2.7.6}$$

特别重要的一种情形是，当系统是稳定的，从而变换方程（2.7.2）中不显含时间 t 时，则对时间的偏微商为零，即

$$\frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial t}=0, \qquad b_i=0, \qquad c=0$$

因此，在这种情形下

$$T = \sum_{i,k} a_{ik}(q)\dot{q}_i\dot{q}_k \tag{2.7.7}$$

其中，a_{ik}只是坐标的函数。可见，在广义坐标中，动能仍然是广义速度的二次齐次函数，但它也可能依赖于坐标。

将式（2.7.7）对 $\dot{q}_l$ 求导数

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} = \sum_k a_{lk}\dot{q}_k + \sum_i a_{il}\dot{q}_i$$

用 $\dot{q}_l$ 乘上式两端并求和

$$\sum_l \dot{q}_l \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} = \sum_{k,l} a_{lk}\dot{q}_k\dot{q}_l + \sum_{i,l} a_{il}\dot{q}_i\dot{q}_l$$

现在，全部指标都是哑指标，也就是说这里的求和均与下标具体是什么符号无关。所以，上式右边两项相同，并考虑到式（2.7.7），则有

$$\sum_l \dot{q}_l \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} = 2\sum_{i,k} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k = 2T \tag{2.7.8}$$

这个重要结果是**欧拉定理**的一个特殊情形，欧拉定理指出，若 $f(y_k)$ 是 y_k 的 n 次齐次函数，则

$$\sum_k y_k \frac{\partial f}{\partial y_k} = nf \tag{2.7.9}$$

在力学中函数 f 可以代表动能，索性就把式（2.7.8）称为**欧拉动能定理**，以与通常人们所说的动能定理式（1.13.2b）区别。

2.8 质点系的拉格朗日函数

2.8.1 封闭质点系的拉格朗日函数

仅质点系内部的质点之间相互作用，而不与任何外部相互作用的质点系，叫做**封闭系统**，简称**封闭系**。封闭系的拉格朗日函数为系统的动能与势能之差

$$L = \sum_\alpha \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{\alpha} - U(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots) \tag{2.8.1}$$

其中，$\boldsymbol{r}_\alpha$ 是第 α 个质点的位矢，U 为质点系的势能。

势能仅与所有各质点在同一时刻分布有关这一事实表明，它们之中任一个质点位置的改变，立刻就反映在所有其他质点上，所以可以说，相互作用是“瞬时”传递的，或者说相互作用传递的速度是无穷大。在经典力学中相互作用的这

种性质是不可避免的，这一点与经典力学的基本前提——时间的绝对性和伽利略相对性原理有着密切的联系。试设想如果说相互作用不是瞬时传递的，也就是说以有限速度传递，则这个速度在不同的（相对运动着的）坐标系中是不同的，因为时间的绝对性自然而然地意味着可以把通常的速度相加定理运用于一切现象。但是，这样一来，有相互作用的物体的运动规律在不同的（惯性）系里就将不一样了，而这是违反伽利略相对性原理的。

2.8.2 非封闭质点系的拉格朗日函数

现在我们来考察与另一系统 B 相互作用的非封闭系 A，设系统 B 的运动是已知的。在这种情形下我们就说，系统 A 在给定的（系统 B 所造成的）外场中运动。由于运动方程是从最小作用量原理，用对每个坐标独立变分的方法导出的，所以我们可以利用整个系统 $A+B$ 的拉格朗日函数 L 来求得系统 A 的拉格朗日函数 L_A。依据假设，系统 B 的运动是已知的，从而把 L 中的坐标函数 q_B 用已知的时间函数代替。

假设系统 $A+B$ 是封闭的，则有

$$L = T_A(q_A, \dot{q}_A) + T_B(q_B, \dot{q}_B) - U(q_A, q_B) \tag{2.8.2}$$

式中，前两项分别是系统 A 和 B 的动能，而第三项是他们联合的势能。以已知的时间函数代替 q_B，并去掉只与时间有关的项 $T(q_B(t), \dot{q}_B(t))$。只与时间有关的项肯定是另外某一时间函数的全微商，去掉该项对拉格朗日函数并不受影响。于是我们得到

$$L_A = T_A(q_A, \dot{q}_A) - U(q_A, q_B(t)) \tag{2.8.3}$$

由此可见，系统在外场中运动由一般类型的拉格朗日函数来描述，不同点仅仅在于势能可能直接依赖于时间。因此，在外场中运动的质点的拉格朗日函数的一般形式是

$$L = \frac{mv^2}{2} - U(\boldsymbol{r}, t) \tag{2.8.4}$$

2.9 拉格朗日方程和牛顿方程等价

在 2.6 节讨论了自由质点的拉格朗日函数，在 2.7 节又讨论了质点系的拉格朗日函数，知道了拉格朗日函数，我们就可以写出运动方程式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_\alpha} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_\alpha} \tag{2.9.1}$$

根据式（2.8.1）知，封闭系统拉格朗日函数的一般形式为

$$L = \sum_\alpha \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2} - U(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots) \tag{2.9.2}$$

将式（2.9.2）代入式（2.9.1）得

$$m_\alpha \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_\alpha}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_\alpha} \tag{2.9.3}$$

这种形式的方程叫**牛顿方程**，它是描述有相互作用的质点系力学的基础。方程式（2.9.3）右方的矢量

$$\boldsymbol{F}_\alpha = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_\alpha} \tag{2.9.4}$$

称为作用在第 α 个质点的**力**，它与势能 U 一样只依赖于所有质点的坐标，而与它们的速度无关。因此，方程式（2.9.3）表明，质点的加速度只是坐标的函数。

我们知道，势能的准确度是到可以加上一个任意常数，加上任意常数并不改变方程，这正是在 2.5 节所讨论的拉格朗日函数非唯一性的特殊情况。

如果系统在外场中运动，其势能可能直接依赖于时间，从而拉格朗日函数可能直接依赖于时间，这是与封闭系统的不同之处。根据式（2.8.4），在外场中运动的质点拉格朗日函数的普遍形式是

$$L = \frac{mv^2}{2} - U(\boldsymbol{r}, t) \tag{2.9.5}$$

将式（2.9.5）代入式（2.9.1）得在外场运动的质点的牛顿方程是

$$m \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}} \tag{2.9.6}$$

通过上面的阐述我们看到，拉格朗日方程和牛顿方程二者观点不同而实质相同。下面进行更为直观的进一步说明。

在拉格朗日方程（2.9.1）中，让我们选取直角坐标为广义坐标。于是拉格朗日方程（对于单个质点）变为

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0 \qquad (i = 1,2,3) \tag{2.9.7}$$

或者

$$\frac{\partial (T - U)}{\partial x_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{(T - U)}{\partial \dot{x}_i} = 0$$

但是，在直角坐标系中，对于保守系统，$T = T(\dot{x}_i), U = U(x_i)$，所以

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial \dot{x}_i} = 0$$

于是，拉格朗日方程变为

$$-\frac{\partial U}{\partial x_i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\right) \tag{2.9.8}$$

对于保守系统还有

$$-\frac{\partial U}{\partial x_i} = F_i \tag{2.9.9}$$

而

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{2}m\dot{x}_i^2\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{x}_i)=\dot{p}_i \tag{2.9.10}$$

从而得到

$$\dot{p}_i=F_i \tag{2.9.11}$$

这就是从方程（2.9.1）推导出的牛顿方程。如写成矢量形式，即为

$$\dot{\boldsymbol{p}}=\boldsymbol{F} \tag{2.9.12a}$$

或者写成

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F} \tag{2.9.12b}$$

可见，在广义坐标就是直角坐标的情况下，拉格朗日方程和牛顿方程是完全相同的。事实上，对于任何给定的力学系统，用拉格朗日方法和牛顿分析的结果二者应该是相同的。

我们已经惯常于力学系统借助于矢量描述，诸如力、速度、角动量、力矩等。牛顿方法强调的是外部原因对物体的作用（力）。而拉格朗日方法却只涉及与物体有关的量（动能和势能）。事实上，在拉格朗日表达中任何时候也不引进力的概念，运动方程完全是在位形空间中以**标量**运算的形式而得到的。能量是个标量，所以拉格朗日函数对坐标变换是个不变量。其实，这种变换并不限于在普通空间的不同正交坐标系之间的变换，还可以是普通坐标系和广义坐标系之间的变换。这样，可以从普通空间（有时其中运动方程可能非常复杂）变换到位形空间，适当选取位形空间可使某一特殊问题得到最大限度的简化。在某些情况下，要明确地陈述清楚所有作用于物体上的力根本是不可能的（如某些约束力的情形），但是却仍然可以给出动能和势能的表达式。正因为这个事实，最小作用量原理对量子力学（包括量子场论）很有用，这是因为量子力学中有时不知道力却知道能量。

我们已清楚地看到，牛顿力学方程的微分表述和最小作用量原理的积分表述（以及所得到的拉格朗日方程）已证明二者是完全等价的。因此，在这些以**物理效应**的描述为基础的不同观点之间就不会有什么区别。但是从哲学的角度看，还是可以做出区分的。在牛顿表述中，认为一定的力作用在物体上即产生一确定的运动，即确定的**效果**总是和一定的**原因**相联系的。然而，根据最小作用量原理，物体的运动可以看作自然界为了一定**目的**而设法达到的结果，即要使动能和势能之差对时间的积分为最小。显然，力学问题的运算解答与采用这些观点中哪一种无关。

2.10　能量守恒定律

力学系统运动时，决定系统状态的 $2s$ 个量 q_i 和 $\dot{q}_i$（$i=1, 2, \cdots, s$）随时间而变化。但是却有这些量的某些函数，在运动时它们保持着只依赖于初始条件的恒定值。这种函数叫**运动积分，**也就是我们通常说的**守恒量**。

但是，并非所有的运动积分都会在力学中同样起重要作用。运动积分中有一些积分，它们的不变性有着深刻的根源，这些根源是与空间和时间一些基本性质——它们的均匀性和各向同性——联系着。所有这些守恒量都具有所谓可加性，即对于由几部分组成而各部分之间的作用又可以忽略的系统，它们的值等于各组成部分的值之和。可加性赋予相应的量以特别重要的力学作用。例如，假设有两物体在某段时间内相互作用，既然无论是作用前或作用后，整个系统的每个可加积分都等于两个物体单独存在时它们的值之和，那么，如果已经知道在作用前物体的状态，这些量的守恒定律立即使我们有可能去做一系列关于作用后物体状态的结论。

上述这些论点我们曾多次反复强调过。不过那时只做了一些启蒙性的提示或肤浅的说明，并没有真正从时空的性质作为出发点去推导这些守恒定律。从现在起我们开始着手这样做，以便进一步深化对这些守恒定律的认识。

我们首先从由于**时间均匀性**而产生的守恒定律开始阐述。

由于时间的均匀性，封闭系统的拉格朗日函数不直接依赖于时间，即

$$\frac{\partial L}{\partial t}=0 \tag{2.10.1}$$

于是，拉格朗日函数对时间的全微商可以写成如下的形式

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i \tag{2.10.2}$$

[如果 L 直接依赖于时间，那么在等式的右边还须加一项 $\frac{\partial L}{\partial t}$，由于式(2.10.1)，这一项没有了] 我们知道，拉格朗日方程为

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{2.10.3}$$

用式 (2.10.3) 代替式 (2.10.2) 中的 $\frac{\partial L}{\partial q_i}$，则有

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \sum_i \dot{q}_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i \tag{2.10.4}$$

上式可以改写成

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \sum_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)$$

或者

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L\right) = 0 \tag{2.10.5}$$

显然，括号中的量不随时间变化

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = \text{const} \tag{2.10.6}$$

这个量在封闭系统运动时是不改变的，也就是说，这个量是系统的一个运动积分。这个量称为系统的**能量**。式（2.10.6）所表达的正是能量守恒定律。从表达式（2.10.6）我们还看到，能量是通过拉格朗日函数**线性**表示的，由拉格朗日函数的可加性可直接得出**能量可加性**的结论。

能量守恒定律不仅对封闭系统是正确的，而且对于处在不变（也就是说不依赖于时间）的外场中的系统也是正确的。因为在上述推导中，唯一利用过的拉格朗日函数的特性——不依赖于时间——在这种情况下也存在。

如果势能不显含速度 $\dot{q}_i$ 和时间 t，系统的拉格朗日函数具有如下形式

$$L = T(q, \dot{q}) - U(q) \tag{2.10.7}$$

其中，T 是速度的二次函数。由于此种情况下，$U = U(q)$，则$\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} = 0$，所以

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial (T - U)}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \tag{2.10.8}$$

于是，式（2.10.6）可以写为

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - (T - U) = \text{const} \tag{2.10.9}$$

由欧拉动能定理式（2.7.8）知

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T \tag{2.10.10}$$

将式（2.10.10）代入式（2.10.9）得

$$E = T(q, \dot{q}) + U(q) \tag{2.10.11}$$

可见，在这种情况下式（2.10.6）所表示的就是总能量。若在直角坐标系中，则

$$E = \sum_\alpha \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2} + U(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots) \tag{2.10.12}$$

式（2.10.6）表明，系统的能量可以表示成两个本质不同的项，即依赖于速度的动能和仅依赖于质点坐标的势能之和。

式（2.10.6）可以看成哈密顿函数 H 的定义。即

$$H = \sum_\alpha \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L \tag{2.10.13}$$

不过必须注意，仅在满足以下条件时哈密顿函数 H 才等于总能量 E：

（1）联系直角坐标和广义坐标的变换方程

$$x_{\alpha,j} = x_{\alpha,j}(q_i, t)$$

必须与时间无关，这样才能保证动能是 $\dot{q}_i$ 的二次齐次函数。

（2）势能必须与速度无关，从而可以从关于 H 的方程中消去$\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i}$项。

2.11　动量守恒定律

2.11.1　动量守恒定律

封闭系统，即只有系统内质点之间相互作用而不和外界作用的系统。封闭系统的动量守恒，是本课程最先讲到的一个守恒定律，那时实际上是根据实验总结并作为一个基本假设提出来的（1.5 节），对于动量守恒是由空间均匀性产生只是做了点一般性的提示。1.11 节讨论了势能的概念之后，从系统的性质与它在空间中的位置无关性，对动量守恒与空间的均匀性的联系做了进一步说明。现在我们从时间的均匀性推导动量守恒。

由于空间均匀性，当封闭系统作为一个整体在空间移动时拉格朗日函数应该不变。这就是我们的基本思路。

平移意味着系统所有的点移动同样长的距离，也就是说，质点系中质点位矢 $\boldsymbol{r}_\alpha \to \boldsymbol{r}_\alpha + \boldsymbol{\varepsilon}$，其中 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 表示系统一个无穷小的移动。在速度不变的情况下，由坐标的无穷小的改变而引起拉格朗日函数 L 的改变是

$$\delta L = \sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_\alpha}\delta \boldsymbol{r}_\alpha = \boldsymbol{\varepsilon}\sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_\alpha} \tag{2.11.1}$$

由于 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 是任意的，所以要求拉格朗日函数的变分

$$\delta L = 0 \tag{2.11.2}$$

就相当于要求

$$\sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_\alpha} = 0 \tag{2.11.3}$$

我们知道，拉格朗日方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_\alpha} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_\alpha} \tag{2.11.4}$$

由此我们得到

$$\sum_\alpha \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_\alpha} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_\alpha} = 0 \tag{2.11.5}$$

于是我们得到结论，在封闭力学系统中，矢量

$$\boldsymbol{P} = \sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_\alpha} = \text{const} \tag{2.11.6}$$

在运动中是不变的。矢量 $\boldsymbol{P}$ 称为系统的**动量**。因此，**空间的均匀性意味着封闭系统的动量守恒**。

若系统的拉格朗日函数具有如下形式

$$L = \sum_{\alpha} \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2} - U(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots) \tag{2.11.7}$$

将其对 $\boldsymbol{v}_\alpha$ 微分可得质点系的动量为

$$\boldsymbol{P} = \sum_{\alpha} m_\alpha \boldsymbol{v}_\alpha \tag{2.11.8}$$

动量的可加性是很明显的。此外，与能量不同，系统的动量等于系统中各单个质点动量 $\boldsymbol{P}_\alpha = m_\alpha \boldsymbol{v}_\alpha$ 之和与质点间的相互作用是否可以忽略无关。

2.11.2 牛顿第三定律

在这里我们还要特别指出，作为出发点的式（2.11.3），其本身具有重要而显明的物理意义。微商

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_\alpha} = \frac{\partial (T-U)}{\partial \boldsymbol{r}_\alpha} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_\alpha} = \boldsymbol{F}_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots, N) \tag{2.11.9}$$

也就是说，$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_\alpha}$ 就是作用在 α 质点上的力 $\boldsymbol{F}_\alpha$（$\alpha = 1, 2, \cdots, N$）。这样，式（2.11.3）就意味着作用在封闭系统所有质点上的力之和等于零

$$\sum_{\alpha} \boldsymbol{F}_\alpha = 0 \tag{2.11.10}$$

特别是，当系统总共只有两个质点组成时

$$\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 = 0$$

或

$$\boldsymbol{F}_1 = -\boldsymbol{F}_2 \tag{2.11.11}$$

式（2.11.11）表明，**第二个质点作用于第一个质点的力与第一个质点作用于第二个质点的力大小相等，方向相反**，这也就是通常所说的**牛顿第三定律**。我们看到，这里又从分析力学的角度得到了牛顿第三定律。

2.11.3 广义动量和广义力

若运动由广义坐标 q_i 来描述，则拉格朗日函数对广义速度的微商

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \qquad (i = 1, 2, \cdots, s) \tag{2.11.12}$$

称为**广义动量**，而拉格朗日函数对广义坐标的微商

$$F_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \tag{2.11.13}$$

称为**广义力**。利用这些符号，拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=\frac{\partial L}{\partial q_i}$$

可写成下面的形式

$$\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t}=F_i \qquad (i=1,2,\cdots,s) \tag{2.11.14}$$

可见，在直角坐标系中，广义动量与矢量 $\boldsymbol{p}_\alpha$ 的分量相合。虽然式（2.11.14）和通常的牛顿第二定律形式很相似，但要注意，一般情况下，广义动量 p_i 是广义速度 $\dot{q}_i$ 的线性齐次函数，并且不能化为质量和速度的乘积。

2.11.4　循环坐标

若完整系统的拉格朗日函数 L 不显含某一广义坐标 q_k，这时，$\frac{\partial L}{\partial q_k}=0$，我们就把 q_k 称为**循环坐标**。若 q_k 是循环坐标，则由广义动量的定义和拉格朗日方程得出

$$\dot{p}_k=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)=\frac{\partial L}{\partial q_k}=0 \tag{2.11.15}$$

也就是说，与循环坐标相对应的广义动量分量不随时间变化，它是一个运动积分。

一个量在某种变换下保持不变的性质称为相对于该变换的**对称性**。$\frac{\partial L}{\partial q_k}=0$ 表示，L 不随 q_k 的变化而变化，也就是说，对于从 q_k 到 $q_k+\Delta q_k$ 的变换来说，L 保持不变。因此得出结论：当拉格朗日函数 L 对于广义坐标 q_k 的变化具有对称性时，存在与 q_k 对应的广义动量积分。

从 2.9 节和本节我们看到，作为经典力学基础的牛顿三大定律都可以从拉格朗日方程推导出来①。似乎拉格朗日力学单纯只是牛顿力学的另一种表达形式，其实不然。拉格朗日理论的主要价值在于它采用了质点系广义坐标作为变量，它并不限于力学量。不论选用哪类广义坐标，拉格朗日方程组的形式不变。这就给我们分析复杂力学课题以及一些非力学课题开拓了新的途径。另外，它还和物理学中守恒定律密切联系着，更易于揭露物理运动的本质，用途更广。

2.12　角动量守恒定律

惯性系的空间是各向同性的，或者说具有旋转对称性。这就意味着当系统整体在空间任意转动时，系统的力学性质不变。与此相对应，当系统转动一个无穷

① 实际上，也可以从牛顿运动方程导出拉格朗日方程。

小角度时，封闭系统的拉格朗日函数不变。

若系统绕某转动轴转动一个无限小的角度 $\delta\theta$（见图 2.4），一个给定点的位矢 $\boldsymbol{r}$ 将改变到 $\boldsymbol{r}+\delta\boldsymbol{r}$，其中

$$\delta\boldsymbol{r}=\delta\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{r} \tag{2.12.1}$$

式中，矢量 $\delta\boldsymbol{\theta}$ 是这样的定义，在转动轴上截取一有方向的线段，其数值和方向这样规定：$|\delta\boldsymbol{\theta}|=\delta\theta$，指向由右手螺旋法则确定。通常把 $\delta\boldsymbol{\theta}$ 叫做**角位移**。

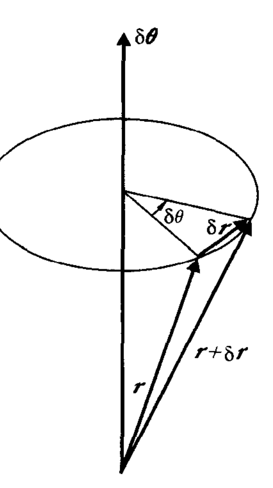


图 2.4 $\delta\boldsymbol{r}=\delta\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{r}$ 的图示

当系统转动时，不仅位矢的方向改变，所有质点的速度也要改变，而且所有矢量按同一规律改变。所以，相对于静止坐标系，速度的增量

$$\delta\boldsymbol{v}=\delta\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{v} \tag{2.12.2}$$

系统转动时，若要求拉格朗日函数的变分为零

$$\delta L=\sum_{\alpha}\left(\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{r}_{\alpha}}\delta\boldsymbol{r}_{\alpha}+\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{v}_{\alpha}}\delta\boldsymbol{v}_{\alpha}\right)=0 \tag{2.12.3}$$

按照式（2.11.12）定义

$$\boldsymbol{p}_{\alpha}=\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{v}_{\alpha}} \tag{2.12.4}$$

所以拉格朗日方程可由下式表示

$$\dot{\boldsymbol{p}}_{\alpha}=\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{r}_{\alpha}} \tag{2.12.5}$$

将式（2.12.4）和（2.12.5）代入式（2.12.3）并考虑到式（2.12.1）和（2.12.2）得

$$\sum_{\alpha}[\dot{\boldsymbol{p}}_{\alpha}\cdot(\delta\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{r})+\boldsymbol{p}_{\alpha}\cdot(\delta\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{v}_{\alpha})]=0 \tag{2.12.6}$$

由于三重标积各因子按循环次序进行调动其值不变，因而式（2.12.6）又可改写为

$$\delta\boldsymbol{\theta}\cdot\sum_{\alpha}[(\boldsymbol{r}_{\alpha}\times\dot{\boldsymbol{p}}_{\alpha})+(\boldsymbol{v}_{\alpha}\times\boldsymbol{p}_{\alpha})]=0 \tag{2.12.7}$$

方括号中恰好是 $\boldsymbol{r}_{\alpha}\times\boldsymbol{p}_{\alpha}$ 对时间的微商，所以，上式可写成

$$\delta\boldsymbol{\theta}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{\alpha}(\boldsymbol{r}_{\alpha}\times\boldsymbol{p}_{\alpha})=0 \tag{2.12.8}$$

由于 $\delta\boldsymbol{\theta}$ 的任意性，要上式为零，只有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{\alpha}(\boldsymbol{r}_{\alpha}\times\boldsymbol{p}_{\alpha})=0$$

于是得

$$\boldsymbol{L}=\sum_{\alpha}\boldsymbol{r}_{\alpha}\times\boldsymbol{p}_{\alpha}=\mathrm{const} \tag{2.12.9}$$

这就是质点系的**角动量守恒定律**。**角动量的可加性**是显而易见的，像动量一样，它也与质点之间是否存在着相互作用无关。

这个定理的一个重要推论如下：考虑外场中一个系统，如果场具有对称轴，则对于该对称轴的转动，系统的拉格朗日函数是不变的。因此，系统相对于对称轴的角动量是与时间无关的常量。

对称性与守恒量之间的关系具有极其重要的意义。这种联系甚至超出经典体系，在固体理论、粒子物理和场的现代理论中有着广泛的应用。

仅仅通过考虑惯性参考系的性质就能够导出封闭系统的守恒定律，其结果可归纳如表 2.1。

表 2.1 时空对称性与守恒定律

惯性参考系特性	拉格朗日函数的性质	守恒量
时间均匀性	不显含时间	总能量
空间均匀性	平移不变	（线）动量
空间各向同性	转动不变	角动量

因此，对于封闭系统，有七个守恒量（运动积分）：总能量、动量和角动量。能量是标量，只有一个分量；而动量和角动量是矢量，各有三个分量，所以共有七个守恒量。这七个且仅这七个运动积分对于构成系统的各质点而言具有**可加性**，而不论各质点之间是否有相互作用。

作为角动量守恒的例子，我们来讨论圆锥面上质点的运动。

设质量为 m 的质点，受重力作用，约束在半角为 α 的圆锥面上运动（见图 2.5）。很明显，该问题具有圆柱对称性，我们选用柱面坐标，选 ρ，φ，z 作广义坐标。然而，因有约束方程

$$z=\rho\cot\alpha \tag{1}$$

所以，系统仅有两个自由度，从而仅有两个广义坐标。可用式（1）消去坐标 z 或 ρ，根据柱面坐标中质点速度 $\boldsymbol{v}$ 的公式（1.4.19a），很容易得到速度的平方为

$$\begin{aligned} v^2 &= \dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2 \\ &= \dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2+\dot{\rho}^2\cot^2\alpha \\ &= \dot{\rho}^2\csc^2\alpha+\rho^2\dot{\varphi}^2 \end{aligned} \tag{2}$$

设 $z=0$ 时，$U=0$。所以质点的势能为

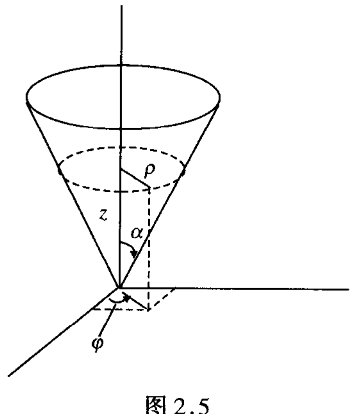


图 2.5

$$U = mgz = mg\rho\cot\alpha \tag{3}$$

故系统的拉格朗日函数为

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2\csc^2\alpha + \rho^2\dot{\varphi}^2) - mg\rho\cot\alpha \tag{4}$$

注意：L 中不显含 φ，因此 $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$。对于坐标 φ 的拉格朗日方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 0 \tag{5}$$

故

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2\dot{\varphi}^2 = \text{const} \tag{6}$$

但是，$m\rho^2\dot{\varphi} = m\rho^2\omega$ 恰好是绕 z 轴的角动量。所以，式（6）表示系统绕对称轴的角动量守恒。

2.13 最小作用量原理的修正形式

前面我们讨论了保守力场中的最小作用量原理，所用的方法属变分的积分形式。本节我们将再把最小作用量原理推广到包含非保守力的情形，采用的方法属变分的微分形式。这样读者便可以对物理学中常用的变分法和最小作用量原理有一个完整的认识。

2.13.1 虚位移

在不破坏系统约束的条件下，质点系或其中各质点可能发生的任何微小的位移，称为该质点系的**虚位移**，或称为**可能位移**。与此相对应，质点由于运动实际上所发生的位移，称为**实位移**。

虚位移和实位移虽然都受约束的限制，是约束所许可的位移，但二者是有区别的。实位移是在一定力的作用和已知初始条件下，在一定的时间内发生的位移，具有确定的方向；而虚位移纯属几何概念，它既不牵涉到系统的实际运动，也不牵涉到力的作用，与时间过程和初始条件无关，在不破坏系统的约束的条件下，它具有任意性。例如，一个被约束在固定面上的质点，实位移只有一个，而虚位移在它的约束面上则有任意个。由此可知，在稳定约束的条件下，实位移只是虚位移中的一个（注意：在不稳定约束的情形下，虚位移不再包含实位移，这个结论不再成立）。为区别虚位移和实位移，虚位移用变分符号 δ 表示，如 $\delta\boldsymbol{r}$，δx_i，$\delta\varphi$ 等，以兹与表示实位移的微分符号 d 相区别。数学上 δf 称为函数 f 的

变分①，进行变分时是把其中的基本变数（时间变数 t）视为不变的参数，并把基本变数的函数视为不随基本变数而变的。

按照上面的定义，质点的虚位移是约束允许的可能的微小位移。因此，一个质点被约束在一个固定曲面 S 上（见图 2.6），则该质点到曲面上相邻各点的无限小位移都是它的虚位移。如略去高阶微量，则可认为这些位移都应在通过 P 点的曲面的切平面上。虚位移的这个性质可以用解析法证明如下。

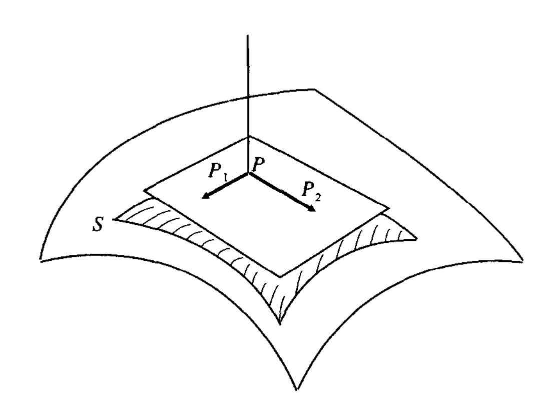


图 2.6 虚位移示意图

设质点的约束方程（即曲面方程）为

$$f(x,y,z)=0 \tag{2.13.1}$$

假想质点由 $P(x,y,z)$ 点有一虚位移

$$\delta \boldsymbol{r}=\delta x \boldsymbol{e}_x+\delta y \boldsymbol{e}_y+\delta z \boldsymbol{e}_z$$

到达 $P_1(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z)$ 点时，坐标发生了微小的变化，δx，δy，δz 为坐标的变分。显然 P_1 点也应满足约束方程，即

$$f(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z)=0 \tag{2.13.2}$$

由（2.13.1）和（2.13.2）两式略去高阶微量可求得函数 $f(x,y,z)$ 的变分为

$$\delta f=\frac{\partial f}{\partial x}\delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\delta y+\frac{\partial f}{\partial z}\delta z=0 \tag{2.13.3}$$

人们正是把基本函数不变（$\delta t=0$），而函数本身改变所得到的函数的任意改变量称为函数的变分。利用梯度算符

① 变分有等时变分和不等时变分之别。在 $\delta t=0$ 的假设下，δ 和 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 的先后次序可以对易的变分叫做等时变分。至于 δ 和 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 的先后次序不能对易的那种变分则称为不等时变分。本课程的变分都是对等时变分而言，不涉及不等时变分。

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{e}_x+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{e}_y+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{e}_z \tag{2.13.4}$$

可以把式（2.13.3）改写成为

$$\nabla f\cdot\delta\boldsymbol{r}=0 \tag{2.13.5}$$

$\delta\boldsymbol{r}$ 是 P 点的位矢 $\boldsymbol{r}$ 的变分，代表点的虚位移。式（2.13.5）说明，$\delta\boldsymbol{r}$ 必然垂直于曲面上 P 点的法线方向，也就是在曲面上 P 点的切平面内。

2.13.2 虚功原理

对于由 N 个离散质点组成的力学系统，假定系统处于平衡态，根据牛顿第二定律，其平衡的充分必要条件是作用于每一质点上的合力为零即 $\boldsymbol{F}_\alpha=0$，那么力 $\boldsymbol{F}_\alpha$ 在虚位移 $\delta\boldsymbol{r}_\alpha$ 上所做的虚功 $\boldsymbol{F}_\alpha\cdot\delta\boldsymbol{r}_\alpha$ 亦为零。把这些等于零的标积对所有质点求和，其结果也必为零

$$\sum_\alpha\boldsymbol{F}_\alpha\cdot\delta\boldsymbol{r}_\alpha=0 \tag{2.13.6}$$

此式无非是 $\boldsymbol{F}_\alpha=0$（$\alpha=1$，2，…，N）的等价条件，实质上并没有给出任何新鲜物理内容。为得到新的结果，我们把 $\boldsymbol{F}_\alpha$ 分解为主动力 $\boldsymbol{F}_\alpha^{(\mathrm{a})}$ 和约束力 $\boldsymbol{R}_\alpha$。我们知道，约束力的出现是为了保证约束的实现，当质点做约束允许的位置变动时，我们期望它对外力所做的功不作任何贡献。根据这一思想，我们给出理想约束的定义：如果作用于质点系的所有约束力 $\boldsymbol{R}_\alpha$ 对任意的可逆虚位移 $\delta\boldsymbol{r}_\alpha$ 所做的功 δW 等于零，则称这种约束为**理想约束**。亦即理想约束的条件为

$$\delta W=\sum_\alpha\boldsymbol{R}_\alpha\cdot\delta\boldsymbol{r}_\alpha=0 \tag{2.13.7}$$

在这个定义中，我们要注意，理想约束是对整个系统的约束情况，而不是对作用于系统的个别约束来说的。所谓可逆虚位移是指如果 $\delta\boldsymbol{r}_\alpha$ 为一组虚位移，则 $-\delta\boldsymbol{r}_\alpha$ 也是一组虚位移。当约束条件是以等式来表达时（即所谓双面约束），则一切虚位移都是可逆的。以下我们只讨论双面约束的情况。

上面定义的理想约束条件对于刚体是真正成立的，对于大量其他约束也是适用的。如果一个质点被约束在一个表面上运动，约束力是垂直于表面的，而虚位移必须与表面相切，因此虚功为零。如果有摩擦力存在，就出现了例外。摩擦力是约束力的一种，但摩擦的存在不能用系统的位置和速度的约束条件来描述，它不是一个约束条件或运动条件，而是一个物理过程（由机械运动转换为热运动的物理过程）。摩擦力对于虚位移有时做功，有时不做功。如果我们把对虚位移做功的摩擦力归到主动力中去，而把对虚位移不做功的摩擦力保留在约束力之内，则可以将理想约束作为一个独立的假设提出：作用于质点系统上的约束力对任意可逆虚位移所做的功为零。因而我们得到系统平衡条件为

$$\sum_\alpha\delta\boldsymbol{F}_\alpha^{(\mathrm{a})}\cdot\delta\boldsymbol{r}_\alpha=0 \tag{2.13.8}$$

由此可知，受有理想约束的力学系统平衡的必要兼充分条件是此力学系统的诸主动力在任意可逆虚位移中所做的元功之和等于零。

2.13.3　达朗贝尔原理

由 N 个质点构成的质点系统的动力学方程，根据牛顿运动定律的表达式（2.1.1）可写为

$$m_\alpha \ddot{\boldsymbol{r}}_\alpha = \boldsymbol{F}_\alpha + \boldsymbol{R}_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots, N) \tag{2.13.9}$$

上式经移项也可以写成

$$-m_\alpha \ddot{\boldsymbol{r}}_\alpha + \boldsymbol{F}_\alpha + \boldsymbol{R}_\alpha = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots, N) \tag{2.13.10}$$

这个方程和式（2.13.9）相比虽然在数学上只是移项而已，但在物理上却很有意义。式（2.13.10）是一个力学系统的平衡方程，代表主动力 $\boldsymbol{F}_\alpha$，约束反力 $\boldsymbol{R}_\alpha$ 和质点因有加速度而产生的“反向有效力” $-m\ddot{\boldsymbol{r}}_\alpha$ 的平衡。采用这种观点，动力学变成静力学。反向有效力通常称为**惯性力**。式（2.13.10）反映的这种平衡关系，称为**达朗贝尔原理**。

若用虚位移 $\delta \boldsymbol{r}_\alpha$ 点乘式（2.13.10）并对 α 求和，在理想约束条件下，注意到式（2.13.7），则得

$$\sum_\alpha (\boldsymbol{F}_\alpha - m_\alpha \ddot{\boldsymbol{r}}_\alpha) \cdot \delta \boldsymbol{r}_\alpha = 0 \tag{2.13.11}$$

上式通常称为**达朗贝尔方程，**亦称**动力学一般方程**。

运用达朗贝尔原理处理问题谓之“动静法”。动静法是把动力学问题化为静力学平衡问题去处理。但应指出，动静法只是求解动力学问题的一种方法而已，它没有改变动力学问题的性质，因为系统实际上并不平衡。应用动静法时，系统除受主动力和约束反力外，再假想地加上惯性力，这样就可以用静力学中列平衡方程的方法进行求解。

2.13.4　广义力

因为

$$\boldsymbol{r}_\alpha = \boldsymbol{r}_\alpha(q_1, q_2, \cdots, q_s, t) \tag{2.13.12}$$

所以

$$\delta \boldsymbol{r}_\alpha = \sum_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_\alpha}{\partial q_i} \delta q_i \tag{2.13.13}$$

当采用广义坐标 q_i（$i = 1$，2，$\cdots$，s）时，$\boldsymbol{F}_\alpha$ 的虚功就变为

$$\sum_\alpha \boldsymbol{F}_\alpha \cdot \delta \boldsymbol{r}_\alpha = \sum_i \sum_\alpha \boldsymbol{F}_\alpha \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_\alpha}{\partial q_i} \delta q_i = \sum_i Q_i \delta q_i \tag{2.13.14}$$

其中

$$Q_i = \sum_{\alpha}^{N} \boldsymbol{F}_\alpha \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_\alpha}{\partial q_i} \tag{2.13.15}$$

称为**广义力**。实际上 $\boldsymbol{F}_\alpha \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_\alpha}{\partial q_i}$不过是$\boldsymbol{F}_\alpha$ 在广义坐标 q_i 方向的投影，$\frac{\partial \boldsymbol{r}_\alpha}{\partial q_i}$是方向余弦。注意：正如 q_i 不必具有长度的量纲一样，Q_i 也不必具有力的量纲，但是 $Q_i \delta q_i$ 则必定永远具有功的量纲。

2.13.5 最小作用量原理的修正形式

人们至少能够在形式上把最小作用量原理推广到包括非保守力的情况。推广后的最小作用量原理取如下形式

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} (T + W) \mathrm{d}t = 0 \tag{2.13.16}$$

这里的 δW 为

$$\delta W = \sum_{\alpha} \boldsymbol{F}_\alpha \cdot \delta \boldsymbol{r}_\alpha \tag{2.13.17}$$

量 δW 具有重要的物理意义。在位形空间中的变分路径可以认为是由实际运动路径的一系列虚位移所构成。每一虚位移发生在某给定的瞬时，在那一瞬时，作用在系统上的力具有确定的值。显然可见，δW 表示作用在系统上的力从实际路径到变分路径的虚位移过程中所做的功。所以，以方程（2.13.16）的形式给出的最小作用量原理告诉我们，动能与虚功之和的积分的变分为零。

由式（2.13.14）知

$$\sum_{\alpha} \boldsymbol{F}_\alpha \cdot \delta \boldsymbol{r}_\alpha = \sum_{i} Q_i \delta q_i = \delta W$$

因此，式（2.13.16）可以写成

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T \mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i} Q_i \delta q_i \mathrm{d}t = 0 \tag{2.13.18}$$

在 2.7 节曾指出，在广义坐标中，动能仍然是广义速度的二次函数，但它也可能依赖于坐标，即 $T = T(q, \dot{q})$。于是式（2.13.18）第一个积分的变分为

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i} \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i \mathrm{d}t = 0 \tag{2.13.19}$$

将式（2.13.19）代入式（2.13.18），哈密顿原理成为

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i} \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} + Q_i \right) \delta q_i \mathrm{d}t = 0 \tag{2.13.20}$$

由于假定约束是完整的，所以仅当各项系数都是零，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, s) \tag{2.13.21}$$

时，式（2.13.20）这个积分才会等于零。所以式（2.13.16）代表了最小作用原理式（2.5.2）的推广。方程（2.13.21）通常叫做**完整系拉格朗日方程，**亦称**拉格朗日方程的基本形式或修正形式**。

对于保守力学系统，方程（2.13.21）就简化成式（2.5.3），即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0 \tag{2.13.22a}$$

下面我们就从基本形式的拉格朗日方程推导保守系统的拉格朗日方程。由广义力的定义知

$$Q_i = \sum_\alpha \boldsymbol{F}_\alpha \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_\alpha}{\partial q_i} \tag{2.13.22b}$$

对于保守力系

$$\boldsymbol{F}_\alpha = -\nabla_\alpha U$$

所以

$$Q_i = -\sum_\alpha (\nabla_\alpha U)\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_\alpha}{\partial q_i} = -\sum_\alpha^N \sum_{j=1}^3 \frac{\partial U}{\partial x_{\alpha,j}}\frac{\partial x_{\alpha,j}}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial q_i} \tag{2.13.23}$$

将式（2.13.23）代入式（2.13.21），得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}=-\frac{\partial U}{\partial q_i}$$

或写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial (T-U)}{\partial q_i}=0$$

U 仅是位置的函数，必然与广义速度无关。这样，对 $\dot{q}_i$ 的微商就可以写成包含 U 的项，于是上式写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial (T-U)}{\partial q_i}=0 \tag{2.13.24}$$

定义一个新的函数

$$L = T - U \tag{2.13.25}$$

那么式（2.13.24）可以写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0 \tag{2.13.26}$$

这就是熟知的保守系统的拉格朗日方程。

习　题

2.1 试用拉格朗日方程求重力场中质点在直角坐标系中的运动方程。

〔答〕 $m\ddot{x}=0$，$m\ddot{y}=0$，$m\ddot{z}=-mg$

2.2　以细绳与铅直方向间的夹角 θ 为广义坐标，试用拉格朗日方程求单摆的运动微分方程，设摆长为 l。

〔答〕 $\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\sin\theta=0$

2.3　以平面极坐标为广义坐标，试用拉格朗日方程求行星运动的微分方程。

〔答〕 $\begin{cases} m\ddot{r}-mr\dot{\theta}^2+G\dfrac{Mm}{r^2}=0 \\ r^2\dot{\theta}=h \end{cases}$

2.4　用球面坐标写出一个质点在均匀重力场中的运动微分方程。

〔答〕 $\begin{cases} m\ddot{r}-mr\dot{\theta}^2-mr\dot{\varphi}^2\sin^2\theta+mg\cos\theta=0 \\ mr^2\ddot{\theta}+2mr\dot{r}\dot{\theta}-mr^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta-mgr\sin\theta=0 \\ mr^2\ddot{\varphi}\sin^2\theta+2mr\dot{r}\dot{\varphi}\sin^2\theta+2mr^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta=0 \end{cases}$

2.5　设有一质点在有心力 $\boldsymbol{F}_1=-\frac{\mu m}{r^3}\boldsymbol{r}$ 及与速度大小成正比、方向相反的阻力 $\boldsymbol{F}_2=-a^2\boldsymbol{v}$ 作用下做平面运动，试求其拉格朗日方程式。

〔答〕　选极坐标为广义坐标。因有两个广义坐标，故有两个拉氏方程

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{r}-mr\dot{\theta}^2&=-\frac{\mu m}{r^2}-a^2\dot{r} \\ m(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})&=-a^2r^2\dot{\theta} \end{aligned}\right\}$$

2.6　某一具有两个自由度的力学系统，其动能和势能的形式分别为

$$T=\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{q}_1^2}{a+bq_2}+q_2^2\dot{q}_2^2\right)$$

$$U=a_1+b_1q_2$$

其中，a，b，a_1，b_1 为常数。试证 q_2 与 t 之间的关系可表示为下式

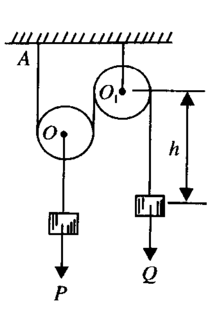
$$(q_2-k)(q_2+2k)^2=h(t-t_0)^2$$

其中，k，h 和 t_0 为常数。

2.7　如图所示，绳的一端固定于 A 点，此绳经过一动滑轮 O 及一定滑轮 O_1，另一端系重 Q 之重物，动滑轮 O 下悬一重 P 之物，且 $Q>\frac{1}{2}P$，设起始时此系统是静止的，且 $h=0$，不计滑轮重量，试用拉格朗日方程求重物 Q 的加速度与速度。

〔答〕 $a=2g\dfrac{2Q-P}{4Q+P}$

$v=2\sqrt{gh\dfrac{2Q-P}{4Q+4}}$



题 2.7 图

2.8　如果某系统的拉格朗日函数是 L，则对广义坐标和时间的任意函数 $f(q,t)$ 来说，函数 $L'=L+\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$，也是该系统的拉格朗日函数，即由 L 得出的运动微分方程与由 L' 得出的运动微分方程相同，试证明之。

2.9　设广义力可以写为

$$Q_i=-\frac{\partial U}{\partial q_i}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i}\right)$$

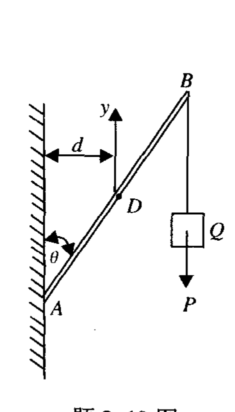
其中，$U=(q,\dot{q},t)$ 是广义坐标、广义速度和时间的函数，q 是 q_1，q_2，…，q_s 的缩写。今如引入 $L'\equiv T-U$，试证 L'满足拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L'}{\partial q_i}=0$$

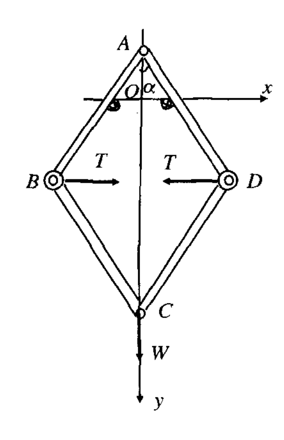
注：此处 U 称为**广义势能**。

2.10　一根长为 l 无重量的直棒的下端与光滑的铅直墙壁接触，棒搭在固定而光滑的钉上，钉与墙壁的距离为 d，棒的上端 B 挂一重物 Q 如图所示，试求在平衡时棒和铅直方向所成的角 θ。

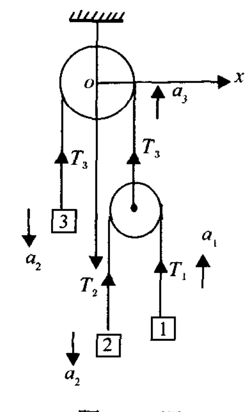
〔答〕　$\theta=\arcsin\left(\frac{d}{l}\right)^{\frac{1}{3}}$



题 2.10 图



题 2.11 图



题 2.12 图

2.11　如图所示，长度同为 l 的四根轻棒光滑地连成一菱形 $ABCD$，AB，AD 的边支于同一水平线上相距为 $2a$ 为两个光滑的钉上，BD 间用一轻线连接，C 点系一重物 W，设 A 点的顶角为 2α，试用虚功原理求绳中张力 T。

〔答〕　$T=W\tan\alpha\left(\frac{a}{2l}\csc^3\alpha-1\right)$

2.12　一固定滑轮上穿一绳，绳一端挂 3kg 砝码，另一端挂无重滑轮且穿一根绳，绳端分别悬挂 1kg 及 2kg 砝码，如题 2.12 图所示。试用动力学一般方程求每个砝码的加速度。

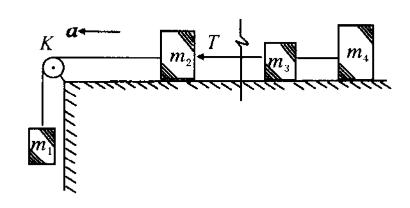
〔答〕　$a_1=\frac{7}{17}g$，　$a_2=\frac{5}{17}g$，　$a_3=\frac{1}{17}g$

2.13　在光滑的水平桌面上放着质量分别为 m_2，m_3 及 m_4 的三个物块，它们用两根细绳连接起来，又在质量为 m_2 的物块上固

连一根绳子且绕过滑轮 K，在绳的另一端挂上质量为 m_1 的物体，假设三根绳子的重量可以忽略且它们都不能伸长，试求质量为 m_1 的物体的加速度 a，以及 m_2 与 m_3 之间绳的张力 T

〔答〕 $a=\dfrac{m_1 g}{m_1+m_2+m_3+m_4}$

$$T=\frac{(m_3+m_4)\cdot m_1 g}{m_1+m_2+m_3+m_4}$$



题 2.13 图

2.14　长为 l 质量为 m 的均匀细直棒，其上端固定，棒与铅直方向成 θ 角进行匀速转动，试用达朗贝尔原理求转动周期。

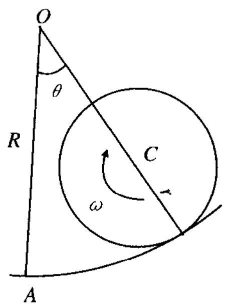
〔答〕 $T=2\pi\sqrt{\dfrac{2l\cos\theta}{3g}}$

2.15　半径为 r 的均匀重球可以在一具有水平轴的，半径为 R 的固定内表面滚动。试求圆球绕平衡位置做微振动的运动方程及其周期。

〔答〕 $\ddot{\theta}+\dfrac{5g}{7(R-r)}\theta=0$

$$\tau=2\pi\sqrt{\frac{7}{5}\left(\frac{R-r}{g}\right)}$$

其中，θ 为圆柱中心与球心的连线与垂直线间的夹角。



题 2.15 图

2.16　如力学组的动能 T 和势能 U 可用下列两函数表示

$$T=\frac{1}{2}(A_1+A_2+\cdots+A_s)(B_1\dot{q}_1^2+B_2\dot{q}_2^2+\cdots+B_s\dot{q}_s^2)$$

$$U=\frac{U_1+U_2+\cdots+U_s}{A_1+A_2+\cdots+A_s}$$

式中，A_i，B_i，U_i，都只是一个参数 q_i 的函数。则此力学组的运动问题可用积分法求解，试证明之。

第三章　哈密顿力学

3.1　勒让德变换

为了应用拉格朗日函数和由它导出的拉格朗日方程确定力学的规律，须用给定系统的广义坐标和广义速度的方法描述系统的力学状态。然而，这样的描述并不是唯一的方法。若用系统的广义坐标和广义动量来描述，具有一系列优点。例如，拉格朗日方程是用 s 个独立变量来描述力学系统的运动，它和牛顿方程一样，是二阶常微分方程组；如果用广义坐标和广义动量作为独立变量，虽然方程的数目由原来的 s 个变成 $2s$ 个，但微分方程由二阶降为一阶，在不少情形下后一种方法比拉格朗日方程求解更方便。尽管如此，但就整体而言，这种方法对力学问题的直接求解，并不显得比拉格朗日方程有特别高明之处。确切地说，后一种表述的优越性在于提供了一个在许多物理学领域内做理论推广的框架，特别是研究各种力学的普遍问题及某些非力学问题的时候更是如此。因此就产生了如何找出用后一种方法描述力学系统的运动方程的问题。

从数学观点来看，把用广义坐标和广义速度换成用广义坐标和广义动量来描述，无非是从一组独立变量换成另一组独立变量而已。

从一组独立变量到另一组独立变量的变换，在数学上叫做**勒让德变换**（Legendre transformation）。这种变换不仅在理论力学，而且在热力学及其他学科也经常遇到。因而掌握和熟悉勒让德变换是十分重要的。

先考察两个变量的勒让德变换。设 $f = f(x, y)$，则

$$df = u\,dx + v\,dy \tag{3.1.1}$$

其中

$$u = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial f}{\partial y} \tag{3.1.2}$$

在这里我们是用 x，y 作为独立变量。实际上，根据问题的需要，x，y，u，v 中任何两个变量都可以作为独立变量看待。若把 u，y 当作独立变量，则由式(3.1.2) 可得

$$x = x(u, y), \qquad v = v(u, y) \tag{3.1.3}$$

此时函数 f 亦可改用 u，y 表示，记作 $\bar{f}$ (u, y)，即

$$\bar{f}(u, y) = f\{x(u, y), y\} \tag{3.1.4}$$

引入函数 g，使得

$$g = -f + ux \tag{3.1.5}$$

对上式进行微分得

$$dg = -df + d(ux) = -(udx + vdy) + (xdu + udx) = xdu - vdy \tag{3.1.6}$$

如果 g 是 u 和 y 的全微分，则

$$\frac{\partial g}{\partial u} = x, \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = -v \tag{3.1.7}$$

把函数 $f(x, y)$ 变换成函数 $g\left(\frac{\partial f}{\partial x}, x\right)$ 的变换式（3.1.5）称为**勒让德变换**。g 称为 f 相对于变量 x 的勒让德变换。式（3.1.7）中的

$$g = g(u, y) = -\bar{f} + ux = \left(-f + \frac{\partial f}{\partial x}x\right)_{x = x(u, y)} \tag{3.1.8}$$

可见，在（旧）函数 f 相对于（不要的变量）x 的勒让德变换中，新函数（如 g）等于不要的变量（如 x）乘以原来的函数（如 f）的偏微商$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$再减去原来的函数（如 f）。新变量（如 u）就等于原来的函数（如 f）对不要的变量（如 x）的偏微商$\left(u = \frac{\partial f}{\partial x}\right)$。这个法则可以推广到多个变量的情况。

3.2 哈密顿正则方程

3.2.1 哈密顿正则方程

拉格朗日函数是广义坐标和广义速度的函数，它的全微分等于

$$dL = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \tag{3.2.1}$$

根据式（2.11.12），微商$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$就是广义动量，即

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i \tag{3.2.2}$$

而由拉格朗日方程知

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \dot{p}_i \tag{3.2.3}$$

考虑到式（3.2.2）和（3.2.3），可把式（3.2.1）写成

$$dL = \sum_i \dot{p}_i dq_i + \sum_i p_i d\dot{q}_i \tag{3.2.4}$$

现在我们把式（3.2.4）中的第二项写成

$$\sum_i p_i d\dot{q}_i = d\left(\sum_i p_i \dot{q}_i\right) - \sum_i \dot{q}_i dp_i \tag{3.2.5}$$

把式（3.2.5）代入式（3.2.4），又把全微分 $\mathrm{d}(\sum_i p_i\dot{q}_i)$ 移到等式左端，并改变所有各项的符号得

$$\mathrm{d}(\sum_i p_i\dot{q}_i - L) = -\sum_i \dot{p}_i \mathrm{d}q_i + \sum_i \dot{q}_i \mathrm{d}p_i$$

微分符号下的量乃是系统的能量［见式（2.10.13）］，当它通过坐标和动量来表达时，叫做系统的**哈密顿函数**

$$H(q,p,t) = \sum_i p_i\dot{q}_i - L \tag{3.2.6}$$

把坐标和动量在其中是独立变量的微分等式

$$\mathrm{d}H = -\sum_i \dot{p}_i \mathrm{d}q_i + \sum_i \dot{q}_i \mathrm{d}p_i \tag{3.2.7}$$

和

$$\mathrm{d}H = \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i}\mathrm{d}q_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i}\mathrm{d}p_i \tag{3.2.8}$$

进行比较，我们得出方程

$$\left.\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned}\right\} \tag{3.2.9}$$

称为**哈密顿方程**。它们组成 $2s$ 个未知数 $p(t)$ 和 $q(t)$ 的 $2s$ 个一阶微分方程组，代替由拉格朗日方法所得到的二阶方程。由于它们在形式上简单且对称，所以也叫**哈密顿正则方程**。以哈密顿方程描述运动，称为**哈密顿力学**。

哈密顿函数对时间的全微商是

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i \tag{3.2.10}$$

如果把方程（3.2.9）中的 $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$ 和 $p_i = -\frac{\partial H}{\partial p_i}$ 代入上式，则最后两项相互抵消，于是

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial t} \tag{3.2.11}$$

特别是当哈密顿函数不显含时间时，则

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{3.2.12}$$

方程（3.2.12）说明，如果 H 不显含时间，哈密顿函数是个守恒量。如前所述（2.10 节），若势能与速度无关，且直角坐标 $x_{\alpha,j}$ 与广义坐标 q_i 之间的变换方程不显含时间，则哈密顿函数等于总能量 $T+U$，在这种条件下，若 $\frac{\partial H}{\partial t}=0$，那么 $H=\text{const}$，我们又再次得到了能量守恒定律，也就是

$$\sum_i p_i\dot{q}_i - L = \text{const} \tag{3.2.13}$$

这个结果与式（2.10.6）在外形上完全相同，但是，在第二章该式左端理解成 q 和 $\dot{q}$ 的函数，而在这里则理解为 q 和 p 的函数。

除了动力学的变量 q，$\dot{q}$ 或 q，p 外，拉格朗日函数和哈密顿函数还包含各种参量，这些参量是描述系统本身的特性或者作用在系统上之外场特性的。假定 λ 是这些参量中的任一个，把它看成变量，那么代替式（3.2.4），我们有

$$\mathrm{d}L = \sum_i \dot{p}_i\mathrm{d}q_i + \sum_i p_i\mathrm{d}\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial\lambda}\mathrm{d}\lambda \tag{3.2.14}$$

而代替式（3.2.7）可得

$$\mathrm{d}H = -\sum_i \dot{p}_i\mathrm{d}q_i + \sum_i \dot{q}_i\mathrm{d}p_i - \frac{\partial L}{\partial\lambda}\mathrm{d}\lambda \tag{3.2.15}$$

从这里我们立刻得到联系拉格朗日函数和哈密顿函数对于 λ 的偏微商的关系式

$$\left(\frac{\partial H}{\partial\lambda}\right)_{p,q} = -\left(\frac{\partial L}{\partial\lambda}\right)_{\dot{q},q} \tag{3.2.16}$$

在偏微商旁的下标是指，当在对 H 微分时，p 和 q 是不变的，而在对 L 微分时，$\dot{q}$ 和 q 是不变的。

应当注意，在从式（3.2.4）到（3.2.7）的变换中，并没有写出带 dt 的项以及可能有的拉格朗日函数对时间有明显依赖关系的项，这是因为该项在这种情形下仅仅起着和所做变换无关的参数的作用。像公式（3.2.16）一样，L 和 H 对时间的偏微商之间也由下述关系式联系

$$\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)_{p,q} = -\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)_{\dot{q},q} \tag{3.2.17}$$

3.2.2 循环坐标

通常把广义坐标和广义动量这一对量称为**正则共轭量**。若 q_k 在哈密顿函数 H 中不出现，根据哈密顿正则方程（3.2.9）

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} = 0$$

则

$$p_k = \text{const}$$

那么，与坐标 q_k 共轭的动量 p_k 是**运动积分**，这个运动积分通常称为**循环积分**。在哈密顿函数 H 中不显含的某一广义坐标 q_k 称为**循环坐标**或**可遗坐标**（因为它不包含在 H 中）。对于任一循环坐标，都有一对应的循环积分。根据式（3.2.16）可知，如果 q_k 不显含在拉格朗日函数 L 中，则它也不显含在哈密顿函数 H 中；反之，若 q_k 不显含在 H 中，则它也不显含在 L 中。若在 H 中是循环

坐标，在 L 中同样也是循环坐标。但要注意，L 中不含某一广义坐标 q_k，并不意味着也不包含广义速度 $\dot{q}_k$。一般来说，相对于该坐标的广义速度是仍然会出现的。因而，循环坐标和相对应的广义动量守恒从哈密顿方程似乎反映得特别明显。特别是，当系统具有对称性时，直接从哈密顿函数就可以求出这个守恒量。例如，假定质点系对某一给定轴为对称轴，则 H 函数对绕此轴转动是一个不变量，所以 H 函数显然不包含这个转动的角坐标，从而这个角坐标（θ）是一个循环坐标，它所对应的角动量 p_θ 必守恒，其原因乃是 $\dot{p}_\theta=-\dfrac{\partial H}{\partial \theta}=0$。

虽然说若在 H 中是循环坐标，则在 L 中同样是循环坐标，反之亦然。然而，拉格朗日方程和哈密顿方程在处理循环坐标上却有原则性的差别。这正是我们下面要特别说明的。

因为拉格朗日方程是关于广义坐标的，且含有二阶微商的微分方程或方程组，所以在拉格朗日表述中，广义动量守恒说明，由广义坐标、广义速度和时间表示的广义动量函数的函数值在时间过程中保持不变；在哈密顿表述中，广义动量的地位发生了变化，它和广义坐标均是地位平等的独立变量，与广义坐标一样，是系统正则坐标中的一部分，广义动量积分本质上就是一个独立的正则坐标值在时间过程中保持不变。

由于以上的区别，在拉格朗日方程和哈密顿方程的两种不同表述中，处理带有循环坐标问题的方法也有不同。

为简单起见，假定循环坐标只有一个，编号为 q_k，在拉格朗日方程中的拉格朗日函数

$$L=L(q_1,q_2,\cdots,q_{k-1},q_{k+1},\cdots,q_s,\dot{q}_1,\dot{q}_2,\cdots,\dot{q}_k,\cdots,\dot{q}_s,t) \quad (3.2.18)$$

虽然 q_k 不是含在函数 L 中，但函数 L 中仍会含有 $\dot{q}_k$。而 $\dot{q}_k$ 一般也不等于常数，所以我们面临的仍然是 s 个自由度系统的拉格朗日函数。这就是说，一般不允许从广义动量积分 $p_k(q_1,q_2,\cdots,q_{k-1},q_{k+1},\cdots,q_s,\dot{q}_1,\dot{q}_2,\cdots,\dot{q}_k,\cdots,\dot{q}_s,t)=c_k$ 反解出 $\dot{q}_k$ 作为 q_1，q_2，$\cdots$，q_{k-1}，q_{k+1}，$\cdots$，q_s 和 $\dot{q}_1$，$\dot{q}_2$，$\cdots$，$\dot{q}_k$，$\cdots$，$\dot{q}_s$ 以及 t 的函数，并以此代入拉格朗日函数式（3.2.18），然后把得到的结果看成 $s-1$ 个自由度的拉格朗日函数。这是可以理解的，因为这样做了以后，相当于引入了各广义坐标 q 和广义速度 $\dot{q}$ 以及时间 t 之间必然满足的一个关系式，因而违反了拉格朗日方程的要求。在拉格朗日方程中，拉格朗日函数对任何一个广义坐标或广义速度求偏微商时，应该把其他一切广义坐标和广义速度都看作不变的常数。

然而，如果是哈密顿方程，情况就不一样，广义动量本身就是独立变量。先用广义动量的积分常数值代入哈密顿函数以减少哈密顿函数中独立变量的数目，即减少自由度，然后再把结果代入哈密顿方程，这并不违反哈密顿方程的要求，因而是完全合法的。一般来说，如果 q_k 是循环坐标，这时 $p_k=c_k$ 是常数，我们

可以首先用 c_k 代替 H 函数中的广义动量 p_k，得出的结果是

$$H=H(q_1,q_2,\cdots,q_{k-1},q_{k+2},\cdots,q_s,p_1,p_2,\cdots,c_k,\cdots,p_s,t) \quad (3.2.19)$$

于是，从问题一开始，就化成了 $s-1$ 个自由度的问题。以此作为 $s-1$ 个自由度系统的哈密顿函数，代入哈密顿方程

$$\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i=1,2,\cdots,k-1,k+1,\cdots,s) \quad (3.2.20)$$

可以解出 $s-1$ 个自由度问题的解，然后把解出的结果代入第 k 个自由度的哈密顿方程，就可以通过计算积分

$$q_k=\int\frac{\partial H}{\partial p_k}\mathrm{d}t \qquad (3.2.21)$$

来独立地求第 k 个自由度的运动。从上述意义来说，在哈密顿表述中，与循环坐标有关的自由度是完全可以分离的。所以循环坐标又称为**可遗坐标**，意思说是暂时用不着管的坐标。

3.2.3 直接从最小作用量原理导出哈密顿正则方程

值得指出,正则运动方程也可以直接从最小作用量原理通过变分法获得。如果以广义坐标和广义动量作为独立变量,根据式(3.2.6)把拉格朗日函数表示为

$$L=\sum_i p_i\dot{q}_i-H(q,p,t) \qquad (3.2.22)$$

因而式（2.5.2）所表述的最小作用量原理现在可以写成下面的积分形式

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(\sum_i p_i\dot{q}_i-H)\mathrm{d}t=0 \qquad (3.2.23)$$

对上式进行变分运算得

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum_i(p_i\delta\dot{q}_i+\dot{q}_i\delta p_i-\frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i-\frac{\partial H}{\partial p_i}\partial p_i)\mathrm{d}t=0 \qquad (3.2.24)$$

注意：在哈密顿表述中，q 和 p 看作独立变量，而 $\dot{q}$ 不再认为是独立的变量了。

大家知道，变分运算和微分运算可以交换，即

$$\delta\dot{q}_i=\delta\left(\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q_i \qquad (3.2.25)$$

利用式（3.2.25）可把式（3.2.24）中的第一项写为

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum_i p_i\delta\dot{q}\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}\sum_i p_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q_i\mathrm{d}t \qquad (3.2.26)$$

对上式进行分部积分

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum_i p_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q_i\mathrm{d}t=\sum_i p_i\delta q_i\Big|_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\sum_i\delta q_i\mathrm{d}p_i \qquad (3.2.27)$$

由于 δq_i 在积分限 t_1 和 t_2 处为零，所以上式积出的项为零，于是

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_i p_i \delta \dot{q}_i \mathrm{d}t = -\int_{t_1}^{t_2} \sum_i \dot{p}_i \delta q_i \mathrm{d}t \tag{3.2.28}$$

将式（2.2.28）代入式（3.2.24）可得

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left\{ \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i - \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i \right\} \mathrm{d}t = 0 \tag{3.2.29}$$

因为 δq_i 和 δp_i 是独立的、任意的，要式（3.2.29）为零，只有每个小括号都等于零才有可能，因而得

$$\left. \begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned} \right\} \tag{3.2.30}$$

这正是哈密顿正则方程。

3.2.4 哈密顿正则方程应用示例

下面举个例子说明哈密顿正则方程的应用。

例　电子的运动

设电荷为 $-e$ 质量为 m 的电子，在电荷为 Ze 的核力场中运动，Z 为原子序数，试用正则运动方程研究电子的运动。

解　原则上这个问题用牛顿运动方程、拉格朗日方程和哈密顿正则方程都能解，这里我们题目要求用正则方程进行讨论。

选球面坐标 r,θ,φ 为广义坐标，如图 3.1 所示。

在球面坐标中速度的平方为

$$v^2 = \dot{s}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta \dot{\varphi}^2 \tag{1}$$

所以，质量为 m 的电子在核力场中以速度 v 运动时，它的动能为

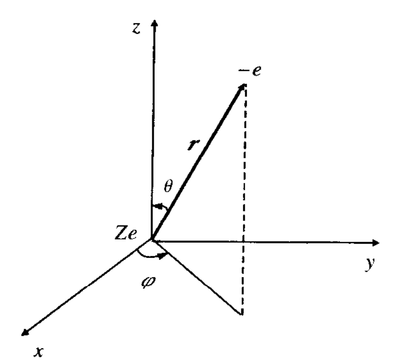


图 3.1　电子的运动

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta \dot{\varphi}^2) \tag{2}$$

电荷间相互作用的库仑力是保守力，其势能为

$$U = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Ze^2}{r} = -\frac{\alpha}{r} \tag{3}$$

其中

$$\alpha = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0}$$

式中，ε_0 为真空中的介电常数。拉格朗日函数为

$$L=T-U=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2)+\frac{\alpha}{r} \tag{4}$$

现在来计算 p_i

$$\left.\begin{aligned} p_r&=\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}=m\dot{r}\\ p_\theta&=\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}=mr^2\dot{\theta}\\ p_\varphi&=\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}=mr^2\sin^2\theta\dot{\varphi}\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

哈密顿函数

$$\begin{aligned} H&=\sum_i p_i\dot{q}_i-L\\ &=p_r\dot{r}+p_\theta\dot{\theta}+p_\varphi\dot{\varphi}-L\\ &=m\dot{r}^2+mr^2\dot{\theta}^2+mr^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2-\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2)-\frac{\alpha}{r}\\ &=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2)-\frac{\alpha}{r}\\ &=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\theta^2}{r^2}+\frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right)-\frac{\alpha}{r} \end{aligned} \tag{6}$$

把 H 的表达式代入正则运动方程

$$\left.\begin{aligned} \dot{q}_i&=\frac{\partial H}{\partial p_i}\\ \dot{p}_i&=-\frac{\partial H}{\partial q_i}\end{aligned}\right\}\quad (i=r,\ \theta,\ \varphi)$$

得到

$$\left.\begin{aligned} \dot{r}&=\frac{\partial H}{\partial p_r}=\frac{p_r}{m}\\ \dot{\theta}&=\frac{\partial H}{\partial p_\theta}=\frac{p_\theta}{mr^2}\\ \dot{\varphi}&=\frac{\partial H}{\partial p_\varphi}=\frac{p_\varphi}{mr^2\sin^2\theta}\\ \dot{p}_r&=-\frac{\partial H}{\partial r}=\frac{p_\theta^2}{mr^3}+\frac{p_\varphi^2}{mr^3\sin^2\theta}-\frac{\alpha}{r^2}\\ \dot{p}_\theta&=-\frac{\partial H}{\partial \theta}=\frac{p_\varphi^2\cos\theta}{mr^2\sin^3\theta}\\ \dot{p}_\varphi&=-\frac{\partial H}{\partial \varphi}=0\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

这就是由哈密顿正则方程求出的电子在核力场中的运动方程。因 H 中不含 φ，故有 $p_\varphi=c$，c 为常数，则 $\dot{\varphi}=\frac{c}{mr^2\sin^2\theta}$，进而得

$$\dot{p}_\theta=\frac{c^2\cos\theta}{mr^2\sin^3\theta} \tag{8}$$

又由式（5）第二式得

$$\dot{p}_\theta=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mr^2\dot{\theta}) \tag{9}$$

从而得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mr^2\dot{\theta})=\frac{c^2\cos\theta}{mr^2\sin^3\theta} \tag{10}$$

由式（5）的第一式得

$$\dot{p}_r=m\ddot{r} \tag{11}$$

而式（7）的第四式可以写成

$$\begin{aligned}\dot{p}_r&=\frac{(mr^2\dot{\theta})^2}{mr^3}+\frac{c^2}{mr^3\sin^2\theta}-\frac{\alpha}{r^2}\\&=mr\dot{\theta}^2+\frac{c^2}{mr^3\sin^2\theta}-\frac{\alpha}{r^2}\end{aligned} \tag{12}$$

于是得到

$$m\ddot{r}-mr\dot{\theta}^2-\frac{c^2}{mr^3\sin^2\theta}+\frac{\alpha}{r^2}=0 \tag{13}$$

式（10）和（13）都不含 φ，故知电子是在一平面内运动。这正是我们所预期的。因电子所受的力是有心力（关于有心力有专门一章讲解，见第四章）。如果令此平面为 $\varphi=0$ 的平面，$\dot{\varphi}=0$，从而 $c=0$，而电子在平面内的方程变为

$$m\ddot{r}-mr^2\dot{\theta}^2+\frac{\alpha}{r^2}=0 \tag{14}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mr^2\dot{\theta})=0$$

此例的目的在于说明用正则运动方程解题的步骤。不过用正则方程来解这类简单问题，可能反而显得迂回，但在较复杂问题中，却能显示出它的优越性。

3.3　相空间和刘维定理

前面我们曾经指出，用广义坐标 q_i 可以定义一个 s 维的**位形空间**，在此空间的每一点均代表系统某一确定状态。同样，用广义动量 p_i 也可以定义一个 s 维的动量空间，该空间的任一点代表某一确定的运动条件。位形空间中任一给定

点只能确定每个质点的位置，而不能提供任何关于质点运动的情况。自然，对于动量空间也是这样。

我们可以借用几何方法讨论力学系统的运动状态。用 q_1，q_2，…，q_s 和 p_1，p_2，…，p_s 为直角坐标构成一个 $2s$ 维空间。这个空间又名为**相空间，也叫相宇**。这里“相”的意义指运动状态。这个名词是由著名的统计物理学奠基者吉布斯引进的。相空间任一点代表力学系统确定的运动状态，这个点称为这系统的**代表点或相点**。当时间改变时，力学系统的运动状态改变，因此代表点将在相空间中运动。当系统运动时，即系统的状态发生变化时，q_i 或 p_i 中一个或多个的数值发生变化，于是代表点在相空间中移动，画出一条线来，称为**相轨道**。相轨道由运动正则方程（3.2.9）唯一确定。由于在物理问题中出现的哈密顿函数及其微商必须是单值函数，故根据正则方程（3.2.9），经过相空间中任一点的轨道只能有一个（因为轨道的运动方向完全由 $\dot{q}$ 和 $\dot{p}_i$ 决定）。当力学系统从不同的初态出发而运动，在相空间中的代表点就沿着不同的轨道而运动。这些不同的轨道都是互不相交的。因为假若相交，则经过相交点有两个不同的轨道，这与哈密顿函数必须是单值函数相矛盾，所以是不可能的。

假设我们所讨论的是保守力学系统，其能量不随时间变化，故

$$H(q,p)=E \tag{3.3.1}$$

其中，E 是一个常数，是正则运动方程一个积分常数。在相空间中，方程（3.3.1）代表一个 $2s-1$ 维的曲面。保守系在相空间中的代表点所走的轨道一定位于能量曲面上。

我们可以认为代表点足够多，从而可以定义一个**相密度** ρ。当然，用以定义相密度的相空间体积元必须足够大，以包含大量的代表点；但是，他们又必须足够小，从而密度可以看作是连续变化的。设位于相空间体积元 $\mathrm{d}\Gamma$ 内代表点的数目为 $\mathrm{d}N$，则

$$\mathrm{d}N=\rho\mathrm{d}\Gamma \tag{3.3.2}$$

其中

$$\mathrm{d}\Gamma=\mathrm{d}q_1\mathrm{d}q_2\cdots\mathrm{d}q_s\mathrm{d}p_1\mathrm{d}p_2\cdots\mathrm{d}p_s \tag{3.3.3}$$

一般情况下，代表点密度随时间和地点不同而不同，所以

$$\rho=\rho(q_1,\cdots,q_s,p_1,\cdots,p_s,t) \tag{3.3.4}$$

现在我们来证明一个重要定理，即**刘维定理**。这个定理说，**保守力学系统在相空间中代表点的密度在运动中保持不变。**

考虑相空间 q_i-p_i 平面内的一个面元（见图 3.2）。单位时间通过左侧边界进入面元内的代表点数目为

$$\rho\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}p_i=\rho\dot{q}_i\mathrm{d}p_i$$

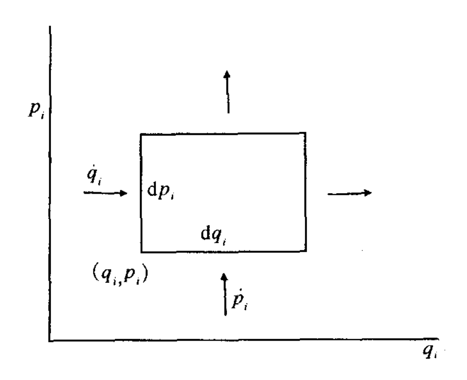


图 3.2 相空间

而单位时间通过底边进入面元内的代表点数目为

$$\rho\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}q_i=\rho\dot{p}_i\mathrm{d}q_i$$

所以单位时间内进入面元 $\mathrm{d}p_i\mathrm{d}p_i$ 的代表点总数为

$$\rho(\dot{q}_i\mathrm{d}p_i+\dot{p}_i\mathrm{d}q_i)$$

通过泰勒展开求得，单位时间内从面元运动出去的代表点总数目近似地为

$$\left[\rho\dot{q}_i+\frac{\partial}{\partial q_i}(\rho\dot{q}_i)\mathrm{d}q_i\right]\mathrm{d}p_i+\left[\rho\dot{p}_i+\frac{\partial}{\partial p_i}(\rho\dot{p}_i)\mathrm{d}p_i\right]\mathrm{d}q_i$$

单位时间内在面元 $\mathrm{d}q_i\mathrm{d}p_i$ 内代表点数由 $\rho\mathrm{d}q_i\mathrm{d}p_i$ 变为 $\left(\rho+\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)\mathrm{d}q_i\mathrm{d}p_i$ ，所以，代表点数增加的量为

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}q_i\mathrm{d}p_i=-\left[\frac{\partial}{\partial q_i}(\rho\dot{q}_i)+\frac{\partial}{\partial p_i}(\rho\dot{p}_i)\right]\mathrm{d}q_i\mathrm{d}p_i$$

将此式对所有可能的 i 值求和，求得

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial\rho}{\partial q_i}\dot{q}_i+\rho\frac{\partial\dot{q}_i}{\partial q_i}+\frac{\partial\rho}{\partial p_i}\dot{p}_i+\rho\frac{\partial\dot{p}_i}{\partial p_i}\right)=0 \tag{3.3.5}$$

根据哈密顿方程（3.2.9）

$$\left.\begin{aligned}\dot{q}_i&=\frac{\partial H}{\partial p_i}\\ \dot{p}_i&=-\frac{\partial H}{\partial q_i}\end{aligned}\right\} \tag{3.3.6}$$

如果 H 的二阶偏微商是连续的，我们有

$$\frac{\partial\dot{q}}{\partial q_i}+\frac{\partial\dot{p}_i}{\partial p_i}=0 \tag{3.3.7}$$

考虑到式（3.3.7），式（3.3.5）变为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial \rho}{\partial q_i}\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial \rho}{\partial p_i}\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t}\right)=0 \tag{3.3.8}$$

然而这正是 ρ 对时间 t 的全微商，所以得到

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=0 \tag{3.3.9}$$

这个重要的结论就是著名的**刘维定理**。于是刘维定理得到证明。这个定理中所说的代表点是指同一力学系统的不同起始状态所构成的不同代表点。这些代表点各自独立地沿着正则运动方程所规定的轨道运动。当这一群代表点由相空间中一个区域开始运动，经过一定的时间后将移动到另外一个区域。刘维定理指出，在新区域中代表点的密度等于出发区域中代表点的密度。根据刘维定理，相空间的代表点在运动中没有集中或分散的倾向，而保持原来的密度不变。

应用正则运动方程，也可以把式（3.3.8）改写为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial \rho}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}-\frac{\partial \rho}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)=0 \tag{3.3.10}$$

这是刘维定理的另一种数学表达式，它是一群代表点所遵循的运动方程。

必须强调指出，我们之所以能够证实相密度 ρ 的不变性，只是因为该问题是在相空间表述的。对于位形空间相应的理论是不存在的。因此，在统计力学中，关于系统的讨论须用哈密顿力学，而不是拉格朗日力学。

3.4 泊松括号

泊松括号是理论物理学中经常用到的一种符号。如果用广义坐标和广义动量来描写系统的力学状态，同时用哈密顿函数来描写系统的力学性质，则系统的动力学规律还可以用泊松括号来描写。力学的泊松括号形式非但能给我们提供一些处理经典力学问题的特定方法，更重要的是，这种形式对量子力学的发展起过重大作用。它使我们能用一种类比的方法从经典力学过渡到量子力学。

3.4.1 泊松括号的定义及其性质

设 $f(q,p,t)$ 是保守完整系统力学状态的某一函数，系统的运动由正则方程

$$\left.\begin{aligned}\dot{q}_i&=\frac{\partial H}{\partial p_i}\\ \dot{p}_i&=-\frac{\partial H}{\partial q_i}\end{aligned}\quad (i=1,2,\cdots,s)\right\} \tag{3.4.1}$$

描述。函数 f 对时间的全微商

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i\right) \tag{3.4.2}$$

应用哈密顿正则方程（3.4.1）可将上式改写为

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right) \tag{3.4.3}$$

人们把上式等号左边的第二项，即由函数 f 和哈密顿函数 H 所组成的具有对称形式的物理量称为**泊松括号**，记作 $[f, H]$

$$[f,H]=\sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right) \tag{3.4.4}$$

所以也可以说，泊松括号是一种缩写符号。一般地说，任意两个力学量 $\varphi(q,p,t)$ 和 $\psi(q,p,t)$ 的泊松括号的定义为

$$[\varphi,\psi]=\sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_i}\frac{\partial \psi}{\partial p_i}-\frac{\partial \varphi}{\partial p_i}\frac{\partial \psi}{\partial q_i}\right) \tag{3.4.5}$$

泊松括号具有下述性质，这些性质都很容易由定义导出。

1）两函数 φ，ψ 在泊松括号中的次序对调，则泊松括号变号

$$[\varphi,\psi]=-[\psi,\varphi]=[-\psi,\varphi]=[\psi,-\varphi] \tag{3.4.6}$$

若两函数中其一为常数，则泊松括号为零

$$[c,\psi]=0 \tag{3.4.7}$$

式中，c 为常数。

2）广义坐标和广义动量的泊松括号

$$[q_i,\ q_j]=0 \tag{3.4.8}$$

$$[p_i,\ p_j]=0 \tag{3.4.9}$$

$$[q_i,\ p_i]=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases} \tag{3.4.10}$$

3）泊松括号对变量 x 的微商

$$\frac{\partial}{\partial x}[\varphi,\psi]=\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x},\psi\right]+\left[\varphi,\frac{\partial \psi}{\partial x}\right] \tag{3.4.11}$$

4）三个函数所组成的泊松括号有下列关系存在

$$[\eta,\ \varphi+\psi]=[\eta,\ \varphi]+[\eta,\ \psi] \tag{3.4.12}$$

$$[\eta,\ \varphi\psi]=[\eta,\ \varphi]\,\psi+\varphi\,[\eta,\ \psi] \tag{3.4.13}$$

$$[\eta,\ [\varphi,\ \psi]]+[\varphi,\ [\psi,\ \eta]]+[\psi,\ [\eta,\ \varphi]]=0 \tag{3.4.14}$$

其中，式（3.4.14）叫做**泊松恒等式**，又称为**雅可比恒等式**。

3.4.2　动力学方程的泊松括号表示

当采用泊松括号后，力学量 $f(q,p,t)$ 随时间变化的动力学规律可表述为

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial f}{\partial t}+[f,H] \tag{3.4.15}$$

特别是，如果力学量只与广义坐标和广义动量有关，而不显含时间，则上式化为

$$\dot{f}=[f,H] \tag{3.4.16}$$

使用泊松括号时，要注意所有的 q，p 都是互相独立的，任意一个对另外一个的偏微商都等于零，例如

$$\frac{\partial p_i}{\partial q_i}=0,\qquad \frac{\partial p_i}{\partial p_j}=0,\qquad \frac{\partial q_i}{\partial p_i}=0,\qquad \frac{\partial q_i}{\partial q_j}=0$$

而相同的 p，q 相互取偏微商则等于 1，例如

$$\frac{\partial p_i}{\partial p_i}=1,\qquad \frac{\partial q_i}{\partial q_i}=1$$

这样，如果 $f=q_i$，或者 $f=p_i$，方程（3.4.16）就变为

$$\left.\begin{aligned}\dot{q}_i&=[q_i,H]\\ \dot{p}_i&=[p_i,H]\end{aligned}\qquad (i=1,2,\cdots,s)\right\} \tag{3.4.17}$$

按定义式（3.4.4）展开这两式左边的泊松括号，立刻可以看出，它们正是哈密顿正则方程本身，所以，方程（3.4.17）可以看成是动力学方程（3.4.15）中的基本方程。

3.4.3 运动积分与泊松括号

我们知道，若系统的一个力学量 $f(q,p,t)$，其自变量 q_i 和 p_i 随时间按一定的力学规律变化时，如果这个力学量的值仍保持为常数，则称为该系统的一个**运动积分**。

根据式（3.4.15），力学量 $f(q,p,t)$ 是系统运动积分的必要和充分条件是

$$\frac{\partial f}{\partial t}+[f,H]=0 \tag{3.4.18}$$

特别是，如果 f 不显含时间 t，则 $f(q,p)$ 是运动积分的条件变成

$$[f,H]=0 \tag{3.4.19}$$

这就是说，当力学量 $f(q,p)$ 不显含时间，若它和系统的哈密顿函数 H 的泊松括号等于零，则它必然是系统的一个运动积分。

运动积分的最简单的例子是，如果系统的哈密函数 H 不显含时间 t，则显然可见

$$\dot{H}=[H,H]=0 \tag{3.4.20}$$

也就是说，这时系统的哈密顿函数本身是一个运动积分。

运动积分的另一个例子是，如果哈密顿函数不显含某一广义坐标 q_k，这时由于

$$[p_k,H] = \sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial p_k}{\partial p_i}\right) \tag{3.4.21}$$

且 q_i 以及 p_i 之间是独立变量的关系，于是，由于$\frac{\partial H}{\partial q_k}=0$ 得出

$$[p_k,H]=0 \tag{3.4.22}$$

所以，与广义坐标 q_k 共轭的广义动量 p_k 是运动积分。

利用泊松括号，有时能从系统的两个已知的运动积分推导出系统的第三个运动积分。显然这是求解动力学方程或根据动力学方程推导系统力学性质的一种方法。这种方法的依据是下面的泊松定理。

泊松定理： 如果 $\varphi(q,p,t)$ 和 $\psi(q,p,t)$ 是某个系统的两个运动积分，那么由它们所构成的泊松括号也是运动积分，即

$$[\varphi,\psi]=\text{const} \tag{3.4.23}$$

证明：如果 φ 和 ψ 不显含时间，则这个定理证明十分简单。可令泊松恒等式（3.4.14）中一个函数为 H，则

$$[H,[\varphi,\psi]]+[\varphi,[\psi,H]]+[\psi,[H,\varphi]]=0 \tag{3.4.24}$$

已知 φ 和 ψ 为系统的运动积分，所以$[\psi,H]=0$，$[H,\varphi]=0$，从而上式的后两项为零($[\varphi,[\psi,H]]=0,[\psi,[H,\varphi]]=0$)。于是必有$[H,[\varphi,\psi]]=0$，因此$[\varphi,\psi]$为运动积分。

如果 φ 和 ψ 显含时间，$[\varphi,\psi]$ 的时间导数是

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\varphi,\psi]&=\frac{\partial}{\partial t}[\varphi,\psi]+[[\varphi,\psi],H]\\&=\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t},\psi\right]+\left[\varphi,\frac{\partial\psi}{\partial t}\right]+[[\varphi,\psi],H]\end{aligned}$$

因 φ 和 ψ 是系统的运动积分，所以

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=[H,\varphi],\qquad \frac{\partial\psi}{\partial t}=[H,\psi]$$

将其代入前面的方程得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\varphi,\psi]&=[[H,\varphi],\psi]+[\varphi,[H,\psi]]+[[\varphi,\psi],H]\\&=[[H,\varphi],\psi]+[[\psi,H],\varphi]+[[\varphi,\psi],H]\end{aligned}$$

根据泊松恒等式，上式的右边等于零。于是得出，这时 $[\varphi,\psi]$ 不随时间变化。如果 $[\varphi,\psi]$ 仍然是正则变量的函数，就说明它是一个运动积分。

利用泊松定理，似乎只要知道正则方程的两个运动积分，就可以求出其余的运动积分，从而使运动微分方程的求解问题得到全部解决。其实这是一种过于理想的想法。实际情况是，由两个已知的运动积分所构成的泊松括号往往与原来的运动积分并不彼此独立。有时也会出现这样的情况，两个运动积分的泊松括号等

于常数，或者只是恒等式。而在另一些情况下，得到的运动积分，可能只是原来运动积分的线性组合。如果说既不发生前一种情况，也不发生后一种情况，那么泊松括号给出新的运动积分。

泊松括号和量子力学有密切关系。方程(3.4.10)与量子条件是相应的。正则方程用泊松括号表示的形式(3.4.17)在量子力学是经常应用的。式(3.4.8)～(3.4.10)在量子力学中称为对易关系。

3.5 均位力积定理

考虑一质点系，所有质点的位矢 $\boldsymbol{r}_\alpha$ 和动量 $\boldsymbol{p}_\alpha$ 都是有界的。这里所谓有界是指对时间的所有值均保持为有限值。定义一个量

$$S = \sum_\alpha \boldsymbol{p}_\alpha \cdot \boldsymbol{r}_\alpha \tag{3.5.1}$$

S 对时间的微商是

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \sum_\alpha (\boldsymbol{p}_\alpha \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_\alpha + \dot{\boldsymbol{p}}_\alpha \cdot \boldsymbol{r}_\alpha) \tag{3.5.2}$$

如果在时间 τ 内计算$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$的平均值，我们得到

$$\langle\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}\rangle = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \frac{S(\tau) - S(0)}{\tau} \tag{3.5.3}$$

若系统的运动是周期性的，且 τ 是周期的整数倍，则 $S(\tau) = S(0)$，而$\langle\dot{S}\rangle = 0$。不过，即使系统并不显示出任何周期性，由于 S 已假定是一有界函数，取 τ 足够长，即可使 $\langle\dot{S}\rangle$ 达到任意小，所以我们总可使式（3.5.2）右端的时间平均值为零（或至少接近为零）。因此，在此极限下有

$$\langle\sum_\alpha \boldsymbol{p}_\alpha \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_\alpha\rangle = -\langle\sum_\alpha \dot{\boldsymbol{p}}_\alpha \cdot \boldsymbol{r}_\alpha\rangle \tag{3.5.4}$$

式（3.5.4）左端的 $\boldsymbol{p}_\alpha \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_\alpha$ 根据欧拉动能定理可知，它是质点 α 动能的平均值的 2 倍；而右端 $\dot{\boldsymbol{p}}_\alpha$ 正好是作用于第 α 个质点的力 $\boldsymbol{F}_\alpha$。所以

$$\langle 2\sum_\alpha T_\alpha\rangle = -\langle\sum_\alpha \boldsymbol{F}_\alpha \cdot \boldsymbol{r}_\alpha\rangle \tag{3.5.5}$$

对 T_α 求和得到系统的总动能 T，从而我们得到一个普遍性的结果

$$\langle T\rangle = -\frac{1}{2}\langle\sum_\alpha \boldsymbol{F}_\alpha \cdot \boldsymbol{r}_\alpha\rangle \tag{3.5.6}$$

上式右端的$\langle\sum_\alpha \boldsymbol{F}_\alpha \cdot \boldsymbol{r}_\alpha\rangle$被著名物理学家克劳修斯称为系统的**均位力积**（Virial）① 其含义就是位矢与力乘积的平均值，简称为系统的**位力**。令

① Virial 一词是克劳修斯根据希腊文 Vis，Vires（意思是力）杜撰的，过去曾译作维里。

$$V = \langle \sum_{\alpha} \boldsymbol{F}_{\alpha} \cdot \boldsymbol{r}_{\alpha} \rangle \tag{3.5.7}$$

则式（3.5.6）可表述为

$$\langle T \rangle = -\frac{1}{2} V \tag{3.5.8}$$

即系统的动能在很长时间间隔中的平均值等于系统的均位力积之半的负值，这就是**均位力积定理**，简称**位力定理**。

若所考察的质点系是封闭的，既没有外力，又假定内力是保守的，于是力 $\boldsymbol{F}_{\alpha}$ 可用 $\left(-\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_{\alpha}}\right)$ 替换

$$\langle \sum_{\alpha} \boldsymbol{r}_{\alpha} \cdot \boldsymbol{F}_{\alpha} \rangle = -\langle \sum_{\alpha} \boldsymbol{r}_{\alpha} \cdot \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_{\alpha}} \rangle \tag{3.5.9}$$

当势能是坐标的齐次函数，亦即满足条件

$$U(\lambda \boldsymbol{r}_1, \lambda \boldsymbol{r}_2, \cdots, \lambda \boldsymbol{r}_N,) = \lambda^n U(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_N) \tag{3.5.10}$$

的函数就属于此种情况。此处 λ 为任意常数，n 是 λ 的次数。根据齐次函数的欧拉定理式（2.7.9）有

$$-\langle \sum_{\alpha} \boldsymbol{r}_{\alpha} \cdot \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_{\alpha}} \rangle = -n \langle U \rangle \tag{3.5.11}$$

现在位力定理式（3.5.8）变成

$$\langle T \rangle = \frac{n}{2} \langle U \rangle \tag{3.5.12}$$

可见，通过位力定理把系统的平均动能和平均势能联系了起来。对于封闭系统

$$T + U = E \tag{3.5.13}$$

因此

$$\langle T \rangle + \langle U \rangle = \langle E \rangle = E_0 \tag{3.5.14}$$

注意到式（3.5.12），得到

$$\langle T \rangle = \frac{n}{n+2} E_0 \tag{3.5.15}$$

$$\langle U \rangle = \frac{2}{n+2} E_0 \tag{3.5.16}$$

式中，常量 E_0 由初始条件决定。

对微振动，$n=2$，则

$$\langle T \rangle = \langle U \rangle \tag{3.5.17}$$

即微振动的动能和势能平均值相等。

对于万有引力相互作用，$n=-1$，则

$$\langle T \rangle = -\frac{1}{2} \langle U \rangle \tag{3.5.18}$$

这时

$$E = -\langle T \rangle \tag{3.5.19}$$

这是由于在这种相互作用的情形下，运动在有限的空间范围内进行，只有在总能量为负的条件下才有可能。

除了前面讲的刘维定理外，位力定理是关于统计性质的另一重要结果。位力定理从一些很普遍的合理假定（坐标和速度有限）立刻得出系统能量上非常重要的普遍结论。例如，由位力定理可以导出分子间有作用力的实际气体状态方程的一般形式。由此可以导出热力学的位力展开式和位力系统。经典理论的位力定理及其推论和量子理论中的结果相同。本节所得到的这些结果都是非常重要的。

3.6 正则变换

众所周知，广义坐标是单值地确定系统在位形空间中位置的 s 个变量。广义坐标 q 的选择不受任何条件的限制。拉格朗日方程的形式与广义坐标的选择无关。因而从这个意义上说，对于从 q_1，q_2，…到任何另外独立变量 Q_1，Q_2，…的变换而言，拉格朗日方程不变。新坐标 Q 是旧坐标 q 的函数，并假设它们之间的关系还显含时间，即所说的如下形式的变换

$$Q_i = Q_i(q, t) \tag{3.6.1}$$

有时把这种变换称为**点变换**。

除拉格朗日方程外，在进行变换式（3.6.1）时，显然还有哈密顿正则方程（3.2.9）也保持自己的形式不变。实际上，哈密顿方程允许更多种类的变换。这自然是因为在哈密顿方法中，动量 p 像坐标一样，也起独立变量的作用。因此，这里变换这一概念可以扩大到包括 $2s$ 个独立变量 p 和 q 到新的变量 P 和 Q 依照下面的公式变换

$$\left.\begin{aligned} Q_i &= Q_i(q, p, t) \\ P_i &= P_i(q, p, t) \end{aligned}\right\} \tag{3.6.2}$$

允许变换种类的这种扩大是哈密顿方法的根本优点之一。

然而，绝不是说在进行形如式（3.6.2）的变换时，运动方程会始终保持自己的正则形式。现在我们来求变换要满足什么样的条件，才能使变量为新变量 P，Q 时运动方程仍然具有下列形式

$$\left.\begin{aligned} \dot{Q}_i &= \frac{\partial H'}{\partial P_i} \\ \dot{P}_i &= -\frac{\partial H'}{\partial Q_i} \end{aligned}\right\} \tag{3.6.3}$$

式中，H' 是一新的哈密顿函数 $H'(P, Q)$。满足正则方程形式不变的变换式

(3.6.2) 叫做**正则变换**。

力学系统中的哈密顿函数 H 中有无循环坐标，与我们选用的坐标系有关。在某种坐标系中没有循环坐标，而在另一种坐标系中却可以有一个或几个循环坐标。正则变换的重要意义就在于使新的正则方程组 (3.6.3) 中的哈密顿函数 H' 比原有的 H 有较简单的结构，有较多的循环坐标，从而更易于求出运动积分和求解方程。这当然是我们在求解正则方程时所希望的。

在 3.2 节我们曾指出，哈密顿方程可以用下面形式的最小作用量原理求得

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_i p_i \mathrm{d}q_i - H\mathrm{d}t\right) = 0 \tag{3.6.4}$$

为使新变量 P 和 Q 也满足哈密顿方程，最小作用量原理

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_i P_i \mathrm{d}Q_i - H'\mathrm{d}t\right) = 0 \tag{3.6.5}$$

对新变量也应成立。当式 (3.6.4) 和 (3.6.5) 中被积式仅相差一坐标、动量和时间的任意函数 F 的全微分时，式 (3.6.4) 和 (3.6.5) 这两个最小作用量原理才等效。此时这两个积分之差是在变分时将不起作用的常量。也就是说应该有

$$\sum_i p_i \mathrm{d}q_i - H\mathrm{d}t = \sum_i P_i \mathrm{d}Q_i - H'\mathrm{d}t + \mathrm{d}F \tag{3.6.6}$$

式 (3.6.6) 是正则变换的必要兼充分条件。函数 F 在两个积分的上下限变为零，它是联系新、旧正则变量的函数。当 F 为已知时，能够由式 (3.6.6) 求出未知变量 p_i，P_i 和 H'，因此 F 称为正则变量的**引导函数**或**母函数**。把式 (3.6.6) 写成如下形式

$$\mathrm{d}F = \sum_i p_i \mathrm{d}q_i - \sum_i P_i \mathrm{d}Q_i + (H' - H)\mathrm{d}t \tag{3.6.7}$$

假定母函数 F 是已知的新、旧坐标（和时间）的函数，$F = F(q,Q,t)$。于是有

$$\mathrm{d}F = \sum_i \frac{\partial F}{\partial q_i}\mathrm{d}q_i + \sum_i \frac{\partial F}{\partial Q_i}\mathrm{d}Q_i + \sum_i \frac{\partial F}{\partial t}\mathrm{d}t \tag{3.6.8}$$

将式 (3.6.7) 和 (3.6.8) 进行比较，显见

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}, \qquad P_i = -\frac{\partial F}{\partial Q_i}, \qquad H' = H + \frac{\partial F}{\partial t} \tag{3.6.9}$$

在函数 F 已经给出的情况下，公式 (3.6.9) 建立起了旧变量 (p, q) 和新变量 (P, Q) 之间的关系，同时还给出了新哈密顿函数的表达式。

若不用变量 q 和 Q 表达母函数，而通过旧坐标 q 和新动量 P 来表达母函数，自然也是可以的，有时甚至显得更方便些。在这种情况下，为了要推导出正则变换公式，应该在关系式 (3.6.6) 中进行适当的勒让德变换。就是说把它改写成

$$\mathrm{d}\left(F + \sum_i P_i Q_i\right) = \sum_i p_i \mathrm{d}q_i - \sum_i P_i \mathrm{d}Q_i + (H' - H)\mathrm{d}t + \sum_i P_i \mathrm{d}Q_i + \sum_i Q_i \mathrm{d}P_i$$

$$= \sum_i p_i \mathrm{d}q_i + \sum_i Q_i \mathrm{d}P_i + (H' - H)\mathrm{d}t \tag{3.6.10}$$

式（3.6.10）左端微分号下的式子通过 q 和 P 表达时，就是新的母函数，我们以 $\Phi(q,P,t)$ 表示它，从而得

$$p_i = \frac{\partial \Phi}{\partial q_i}, \qquad Q_i = \frac{\partial \Phi}{\partial P_i}, \qquad H' = H + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \tag{3.6.11}$$

用类似的方法可求得仅依赖变量 p 和 Q 的母函数 $\Psi(p,Q,t)$ 或者仅依赖于变量 p 和 P 的母函数 $\Theta(p,P,t)$ 的正则变换关系分别为

$$q_i = -\frac{\partial \Psi}{\partial p_i}, \qquad P_i = -\frac{\partial \Psi}{\partial Q_i}, \qquad H' = H + \frac{\partial \Psi}{\partial t} \tag{3.6.12}$$

和

$$q_i = -\frac{\partial \Theta}{\partial p_i}, \qquad Q_i = \frac{\partial \Theta}{\partial P_i}, \qquad H' = H + \frac{\partial \Theta}{\partial t} \tag{3.6.13}$$

上面我们讨论了正则变换的四种不同的形状。从上述四种正则变换明显看出，在新旧哈密顿函数 H' 和 H 之间，只相差一母函数对时间的偏微商。特别是在母函数不显含时间的情况下

$$H' = H \tag{3.6.14}$$

换句话说，要在这种情况下得到新的哈密顿函数，只须把在 H 中的量 p，q 用新量 Q，P 来表达即可。

正则变换的广泛性在很大程度上使广义坐标和广义动量的概念失去原始的意义。因为正则变换式（3.6.2）已使 P，Q 中的每一个量既同坐标 q 相联系，又同动量 p 相联系，因而变量 Q 就已经没有纯粹空间坐标的意义了。广义坐标和广义动量两组变量之间的差别，基本上只是名称的不同罢了。譬如说，$Q_i = p_i$，$P_i = -q_i$ 的变换中（相应的母函数为 $F = \sum_i q_i Q_i$），显然不改变方程的正则形式，而仅使坐标和动量互换而已。正则变换既然是两组 $2s$ 个变量（q，p，Q，P）之间的变换，其中新“坐标”常为旧“动量”，而新“动量”却为旧“坐标”。因此就难以判别究竟哪个是“坐标”，哪个是“动量”，这些名称只是假定的，所以在哈密顿方法的变量 q 和 p 常称为**正则共轭量**。

正则共轭变换的条件可用泊松括号表示，从而有如下的定理：

假设 $[\varphi, \psi]_{p_i,q_i}$ 是以变量 p_i，q_i 对函数 φ 与 ψ 的泊松括号，$[\varphi, \psi]_{P_i,Q_i}$ 是以变量 P_i，Q_i 对函数 φ 与 ψ 的泊松括号。则

$$[\varphi,\psi]_{p_i,q_i} = [\varphi,\psi]_{P_i,Q_i} \tag{3.6.15}$$

这就是说，**泊松括号相对于正则变换保持不变。**

应用上述的正则变换公式直接运算就能证明这一定理。

习　题

3.1　试分别用直角坐标、柱面坐标、球面坐标写出自由质点在势场 $U(x,y,z)$ 中运动的哈密顿函数。

[答]　在直坐标系中

$$H=\frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)+U(x,y,z)$$

在柱面坐标系中

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_\rho^2+\frac{1}{\rho^2}p_\varphi^2+p_z^2\right)+U(\rho,\varphi,z)$$

在球面坐标系中

$$H=\frac{p_r^2}{m}+\frac{p_\theta^2}{mr^2}+\frac{p_\varphi^2}{mr^2\sin^2\theta}-\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\theta^2}{r^2}+\frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right)+U(r,\varphi,\theta)$$

3.2　试用哈密顿正则方程求质点在有势力场 $U(x,y,z)$ 中的运动方程

[答]　$m\ddot{x}=-\dfrac{\partial U}{\partial x}$,　　$m\ddot{y}=-\dfrac{\partial U}{\partial y}$,　　$m\ddot{z}=-\dfrac{\partial U}{\partial z}$

3.3　试用哈密顿正则方程求重力场中自由质点的运动方程。

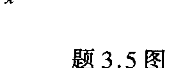
[答]　$m\ddot{x}=0$,　　$m\ddot{y}=0$,　　$m\ddot{z}=-mg$

3.4　试用哈密顿正则方程导出单摆运动方程。

[答]　$\ddot{\theta}+\dfrac{g}{l}\sin\theta=0$

式中，θ 为悬线与铅垂线的夹角，l 为摆长。

3.5　一小环套在光滑杆上，杆绕铅直线以等角速度 ω 旋转成圆锥形，杆与铅垂线成 α 角，试分别用拉格朗日方程和哈密顿方程求小环的运动方程。



题 3.5 图

[答]　$m\ddot{r}=m\omega^2 r\sin^2\alpha-mg\cos\alpha$

3.6　已知一带电粒子在电磁场中的拉格朗日函数为

$$L=\frac{1}{2}mv^2-q\varphi+q\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}$$

式中，$\boldsymbol{v}$ 为粒子的速度，m 为粒子质量，q 为粒子所带的电荷，$\boldsymbol{A}$ 为矢量势，φ 为标量势，试由此写出其哈密顿函数。

[答]　$H=\dfrac{1}{2}mv^2+q\varphi=\dfrac{1}{2m}(\boldsymbol{p}-q\boldsymbol{A})^2+q\varphi$

3.7　试证明 $[xp,x]=-x,[x^2,p^2]=4xp,[f(x),g(x)]=0,[f(p),g(p)]=0$。

3.8　试求由质点系的角动量 $\boldsymbol{L}$ 的笛卡儿分量所组成的泊松括号。

[答]　$[L_x,L_y]=L_z$,　　$[L_y,L_z]=L_x$,　　$[L_z,L_x]=L_y$

$[L_x,L_x]=0$,　　$[L_y,L_y]=0$,　　$[L_z,L_z]=0$

3.9　试求由质点系的动量 $\boldsymbol{P}$ 和角动量 $\boldsymbol{L}$ 的笛卡儿分量所组成的泊松括号。

[答]　$[L_x,P_y]=P_z$,　　$[L_y,P_z]=P_x$,　　$[L_z,P_x]=P_y$

$$[L_x, P_z] = -P_y, \quad [L_y, P_x] = -p_z, \quad [L_z, P_y] = -P_x$$
$$[L_x, P_x] = 0, \quad [L_y, P_y] = 0, \quad [L_z, P_z] = 0$$

3.10　试证

$$\frac{\partial}{\partial t}[\varphi, \psi] = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \psi\right] + \left[\varphi, \frac{\partial \psi}{\partial t}\right]$$

3.11　试证 $Q = \sqrt{2q}\cos p$，$P = \sqrt{2q}\sin p$ 为一正则变换。

3.12　如果（Q_1，Q_2，…，Q_s，P_1，P_2，…P_s）和（q_1，q_2，…，q_s，p_1，p_2，…p_s）由正则变换联系着，试证明

$$[\varphi, \ \psi]_{p_i, q_i} = [\varphi, \ \psi]_{P_i, Q_i}$$

3.13　证明 $p_i = \sqrt{P_i + f_i(Q_i)}\mathrm{e}^{-Q_i}, q_i = \sqrt{P_i + f_i(Q_i)}\,\mathrm{e}^{Q_i}(i = 1, 2, \cdots, s)$，为一正则变换，式中 f_i（Q_i）为 Q_i 任意的但可积分的函数。

3.14　如果利用下列关系把变数 p，q 换成P，Q

$$q = \varphi_1(P, Q), \qquad p = \varphi_2(P, Q)$$

则当

$$\frac{\partial(q, p)}{\partial(Q, P)} = 1$$

时，这种变换是一种正则变换，试证明之。

3.15　试利用正则变换，由正则方程求垂直上抛的物体的运动规律，已知本问题的母函数 $U = mg\left(\frac{1}{6}gQ^3 + qQ\right)$，式中 q 为确定物体位置的广义坐标。

3.16　如正则方程已经积分，故 p_i，q_i 均为 t 及 $2s$ 个积分常数 c_1，c_2，…，c_{2s}的函数，则

$$(c_\alpha, c_\beta) = \sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial q_i}{\partial c_\alpha}\frac{\partial p_i}{\partial c_\beta} - \frac{\partial q_i}{\partial c_\beta}\frac{\partial p_i}{\partial c_\alpha}\right)$$

叫做拉格朗日括号，试证

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(c_\alpha, c_\beta) = 0$$

第四章　有心力场中运动

4.1　二体运动化简为单体运动

如果场方向永远指向固定点或反指向背离固定点，其大小只与到固定点的距离有关的力场称为**有心力场**或**中心力场**。有心力场中上述固定点称为**力心**。倘若有心力场的场力方向指向力心，则称为**引力场**；如果有心力场的场力方向反指向背离力心，则称为**斥力场**。

由两个仅受**有心力**（其方向恒沿两物体中心连线）作用的物体组成的系统的运动是个极其重要的物理问题。在自然界存在许多这种类型的力，例如

(a) 万有引力（牛顿）

$$f(r)=-G\frac{m_1m_2}{r^2}$$

(b) 静电力（库仑）

$$f(r)=k_e\frac{q_1q_2}{r^2}$$

(c) 分子力（范德瓦耳斯）

$$f(r)=\frac{c_1}{r^{13}}-\frac{c_2}{r^7}$$

(d) 核力（汤川）

$$f(r)=\left(\frac{c_1}{r}+\frac{c_2}{r^2}\right)\mathrm{e}^{-c_3r}$$

两个质点构成的封闭系统在它们之间内力作用下的运动问题称为**二体问题**。在忽略其他较远的天体的作用时，两个视为质点的天体，在它们之间万有引力作用下的运动就是二体问题。比如，行星绕太阳的运动，卫星绕地球的运动，再如两个带电粒子彼此相对的运动，都是这种类型的运动。

二体问题之所以重要，不仅是因为有许多实际问题可近似地看成二体问题，而且在理论上可以将这种问题化为一个等价的单质点问题进行研究。

考虑两个质点 m_1 和 m_2 组成的保守系统，这里仅有的力是由相互作用势能 U 产生的。首先假定 U 是两个质点间的 $\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2$，或者它们的相对速度 $\dot{\boldsymbol{r}}_1-\dot{\boldsymbol{r}}_2$，或者 $\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2$ 的某一更高价微商的函数。这种系统有六个自由度，因而有六个独立的广义坐标。假设我们所选的这些坐标是质心位矢 $\boldsymbol{R}$ 的三个分量加上两点相

互距离的矢量$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2$的三个分量［见图 4.1 (a)］，$\boldsymbol{r}$ 是由 m_2 引向 m_1 的位矢，也就是 m_1 相对于 m_2 的位矢。这样，拉格朗日函数的形式将是

$$L = L(\dot{\boldsymbol{R}},\dot{\boldsymbol{r}}) - U(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},\cdots) \tag{4.1.1}$$

动能 T 可以写成质心运动的动能与相对于质心的运动的动能 T' 之和

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\boldsymbol{R}}^2 + T' \tag{4.1.2}$$

其中

$$T' = \frac{1}{2}m_1\dot{\boldsymbol{r}}_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\boldsymbol{r}}_2'^2 \tag{4.1.3}$$

这里的 $\boldsymbol{r}_1'$和 $\boldsymbol{r}_2'$是两个质点分别相对于质心 C 的位矢。它们和两点相互距离的矢量 $\boldsymbol{r}$ 的关系可以用下面的方法求得。如把坐标原点选在质心上［见图 4.1 (b)］，根据式 (1.7.9)，$\boldsymbol{R}=0$，则有

$$m_1\boldsymbol{r}_1' + m_2\boldsymbol{r}_2' = 0 \tag{4.1.4}$$

两质点间的间距矢量 $\boldsymbol{r}$ 为

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_1' - \boldsymbol{r}_2' \tag{4.1.5}$$

将式 (4.1.4) 与 (4.1.5) 联立，很容易求得

$$\boldsymbol{r}_1' = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\boldsymbol{r}, \qquad \boldsymbol{r}_2' = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\boldsymbol{r} \tag{4.1.6}$$

通过式 (4.1.6) 用 $\boldsymbol{r}$ 来表示 T'，即得

$$T' = \frac{1}{2}\mu\dot{\boldsymbol{r}}^2 \tag{4.1.7}$$

在上式中引进了符号

$$\mu \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \tag{4.1.8}$$

这里的 μ 称为**约化质量**或者**折合质量**。式 (4.1.8) 通常还写成

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \tag{4.1.9}$$

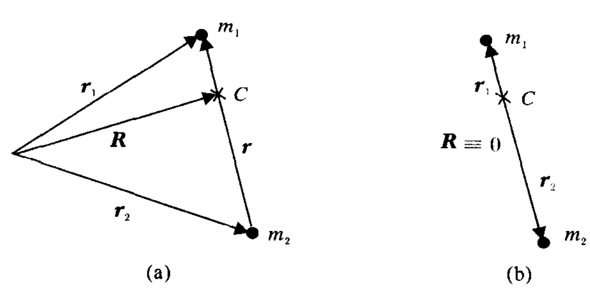


图 4.1 两体问题坐标的选择

总的拉格朗日函数将成为

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{\boldsymbol{R}}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\boldsymbol{r}}^2 - U(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}, \cdots) \tag{4.1.10}$$

可见，质心位矢 $\boldsymbol{R}$ 的三个分量作为广义坐标是循环坐标，所以质心不是静止便是做等速直线运动。涉及 $\boldsymbol{r}$ 的那些运动方程中所有各项都不会含有 $\boldsymbol{R}$ 或 $\dot{\boldsymbol{R}}$。因此，在这里要消去循环坐标特别简单，只要在以后的讨论中略去拉格朗日函数式（4.1.10）的第一项就可以了。

由于从质点间相对轨道的观点而言，系统整体的平移是无关紧要的，我们可以把坐标原点选在质点系的质心上，即 $\boldsymbol{R} \equiv 0$，式（4.1.10）的第一项也就自然消失，拉格朗日函数即为

$$L = \frac{1}{2}\mu\dot{\boldsymbol{r}}^2 - U(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}, \cdots) \tag{4.1.11}$$

当然，当拉格朗日函数式（4.1.10）略去第一项时剩下的部分也就是式（4.1.11）。上述两种观点虽不同，但结果却相同，这正是我们想要得到的结果，就好像有一个固定力心，在与它相距 r 的地方有一个单个质点一样，这一质点的质量为式（4.1.8）所示的折合质量。这样一来，我们就从形式上把相互作用着的二体运动问题化成在给定外场 U 中等效的单体运动问题。对式（4.1.11）应用拉格朗日方程求得问题的解 $\boldsymbol{r}(t)$，则质点 m_1 和 m_2 的轨道 $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_1(t)$ 和 $\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_2(t)$（相对于它们共同的质心）就可以由式（4.1.6）得出。自然，如果只求彼此间的相对轨道，则后一步骤并非必要。

4.2 运动积分

利用折合质量的概念，我们把二体运动化为单体运动。在把二体运动化为单体运动时，我们碰到解一个质点在势能只依赖于到某一定点距离的外场中运动的问题，这种场就是我们在前面提到的有心力场。现在，我们只讨论保守的有心力，其势能只是 r 的函数，即 $U = U(r)$。作用在质点上的力

$$\boldsymbol{F} = -\frac{\partial U(r)}{\partial \boldsymbol{r}} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{4.2.1}$$

其绝对值这时也只依赖于 r，并且方向与位矢一致。因为势能只依赖于质点到力心的距离而与其取向无关，所以系统具有**球对称性**。就是说，系统绕任一过力心的定轴转动不影响运动方程。因此，代表绕固定轴转动的角坐标必然是循环坐标。系统的对称性质使得所研究的问题大为简化。在 2.12 节我们已经证明，在这样的情形下，系统的角动量守恒

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = \mathrm{const} \tag{4.2.2}$$

由此式显然可见，质点的位矢与线动量矢量总是位于垂直角动量 $\boldsymbol{L}$ 的平面内，而 $\boldsymbol{L}$ 在空间的方向是固定的。要满足这一点，位矢 $\boldsymbol{r}$ 所处平面的法线必须平行 $\boldsymbol{L}$。如果 $\boldsymbol{L}$ 为零，则上述论据失效。在这种情况下的运动必定沿着通过力心的某条直线，这是因为在 $\boldsymbol{L}=0$ 的情况下，要求 $\boldsymbol{r}$ 平行于 $\dot{\boldsymbol{r}}$，只有在直线运动中才能做到[①]，因而，在有心力场中运动的质点轨道完全在一个平面内。既然有心力运动总是在一个平面内的运动，用平面极坐标描述较为方便，我们把拉格朗日函数用平面极坐标表示

$$L = \frac{1}{2}\mu(\dot{r} + r^2\dot{\theta}^2) - U(r) \tag{4.2.3}$$

这里拉格朗日函数不显含坐标 θ，因而它是一个循环坐标。与 θ 相应的正则动量等于系统的角动量

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \mu r^2\dot{\theta}$$

因此，两正则运动方程之一为

$$\dot{p}_\theta = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mu r^2\dot{\theta}) = 0 \tag{4.2.4}$$

它的直接积分为

$$l \equiv \mu r^2\dot{\theta} = \text{const} \tag{4.2.5}$$

式中，l 是角动量的常数值，它表明，与循环坐标 θ 共轭的角动量是守恒的，系统的对称性立即使我们得到这个运动积分。

l 为常量这个事实有一个简单的几何解释。从式（4.2.4）还可以得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}\right) = 0 \tag{4.2.6}$$

这里，插入了因子1/2，因为$\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$正好是在时间 $\mathrm{d}t$ 内位矢 $\boldsymbol{r}$ 扫过的**面积速度**——位矢在单位时间内扫过的面积。参考图 4.2 我们看到，$\frac{1}{2}r^2\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}r\cdot r\mathrm{d}\theta$ 是在时间间隔 $\mathrm{d}t$ 内位矢 $\boldsymbol{r}$ 扫过的扇形面积

$$\mathrm{d}A = \frac{1}{2}r^2\mathrm{d}\theta$$

上式除以时间间隔 $\mathrm{d}t$ 即得面积速度为

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{l}{2\mu} = \text{const} \tag{4.2.7}$$

由此可见，角动量守恒等于是说面积速度是与时间无关的常数，即在相等的时间

---

① 从数学形式来看，$\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta$，因此，要 $\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}=0$，必须$\dot{\theta}=0$。

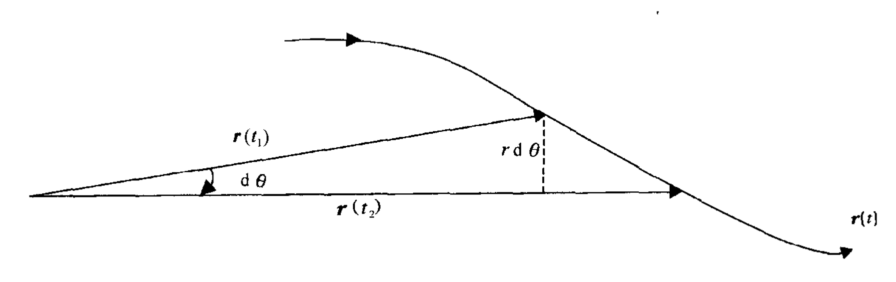


图 4.2 位矢在 dt 时间内扫过的面积

间隔内，点位矢扫过相等的面积[①]。这就是著名的**开普勒行星运动第二定律**[②]。应该强调的是，面积速度守恒并不限于平方反比律力的情形（行星运动），而是有心力运动的普遍结果。

有心力场另外一个运动积分就是总能量。因为我们已经假定讨论非耗散系统，总能量守恒是必然的。因此

$$T + U = E = \text{const} \tag{4.2.8}$$

以及

$$E = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + U(r) \tag{4.2.9}$$

根据式（4.2.5），可以用 l 来表示$\dot{\theta}$，即

$$\dot{\theta} = \frac{l}{\mu r^2} \tag{4.2.10}$$

将式（4.2.10）代入式（4.2.9）得

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{l^2}{\mu r^2} + U(r) \tag{4.2.11}$$

由于我们不考虑无关紧要的系统质心的等速运动，线动量守恒对运动的描述并不增加任何新的内容，这里就不再讨论了。

4.3 运动方程

从能量及角动量守恒定律出发，无须写出运动方程本身，质点在有心力场中运动的问题可以简单地得到解决。

当 $U(r)$ 给定后，式（4.2.11）即完全地描述系统，且这个方程的积分就以参数 E 和 l 的形式给出问题的通解。从式（4.2.11）解出

---

① 有心力场中运动质点的角动量守恒有时称为**面积积分**。

② 开普勒行星运动其他两个定律见 4.6 节。

$$\dot{r}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\sqrt{\frac{2}{\mu}\ (E-U)\ -\frac{l^2}{\mu^2 r^2}} \tag{4.3.1}$$

对式（4.3.1）分离变量并积分可得 $t = t(r)$ 即

$$t = \int \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E-U)-\frac{l^2}{\mu^2 r^2}}} \tag{4.3.2}$$

把这个结果反演即可给出运动方程的标准形式 $r = r(t)$。然而，我们现在更感兴趣的是以 r 和 θ 的形式表示的轨道方程。我们利用数学上常用的小技巧把 $\mathrm{d}\theta$ 进行改写

$$\mathrm{d}\theta=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r}\mathrm{d}r=\frac{\dot{\theta}}{\dot{r}}\mathrm{d}r \tag{4.3.3}$$

由式（4.2.10）知

$$\dot{\theta}=\frac{l^2}{\mu r^2} \tag{4.3.4}$$

把式（4.3.4）关于 $\dot{\theta}$ 和式（4.3.1）关于 $\dot{r}$ 的表达式代入式（4.3.3）并积分得

$$\theta(r) = \int \frac{\frac{l}{r^2}\mathrm{d}r}{\sqrt{2\mu(E-U-\frac{l^2}{2\mu r^2})}} \tag{4.3.5}$$

由于 l 是与时间无关的常数，$\dot{\theta}$ 任何时候都不变号，所以 $\theta(t)$ 总是随着时间单调地变化。

虽然我们已经把有心力场的问题形式上化简为积分求值的问题。但是，只有对力的规律是某些特定形式才容易求出实际解答。因为积分往往不可能用一些已知的函数来表示。事实上经研究过的也只有特定的几种规律的力，其中最重要的是径向距离 r 的幂律函数

$$U \propto r^{n+1}$$

这将使力按 r 的 n 次幂变化：$F \propto r^n$。那么，对于 n 的某些整数和分数的值，解可以用椭圆积分的形式表示。仅当 $n=1$，-2，-3 时，解才可以表示为圆函数①。$n=1$ 的情形正好是简谐振子，而 $n=-2$ 的情形则是重要的平方反比律力。$n=1$，-2 这两种情形是物理学中最为重要的情形。

至此，我们把能量守恒方程与角动量守恒方程合并，解决了质点在有心力场的运动问题，给出了轨道方程 $\theta = \theta(r)$。

对于大多数应用来说，包含能量和角动量的那一组常数最为自然。的确，经

---

① 例如参阅 H.Goldstein 著 Classical Mechanics.

典力学和量子力学间的显著差别就在于 E 和 l 性质上的差别。所以，如果要讨论从经典理论到量子理论的过渡，用能量和角动量对系统做经典描述是十分重要的。

除了上面的常规方法外，我们也可以用关于径向距离 r 作为坐标的拉格朗日方程

$$\frac{\partial L}{\partial r}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}=0 \tag{4.3.6}$$

来求解这个问题。把式（4.2.3）的拉格朗日函数 L 代入上式得

$$\mu(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)=-\frac{\partial U}{\partial r}=F(r) \tag{4.3.7}$$

通过简单的变量代换

$$u=\frac{1}{r} \tag{4.3.8}$$

方程（4.3.7）可以化成更加适合于某些计算的形式。首先我们来计算

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}=-\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}=-\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta}=-\frac{1}{r^2}\frac{\dot{r}}{\dot{\theta}}$$

但是，由式（4.3.4）知，$\dot{\theta}=l^2/\mu r^2$，所以

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}=-\frac{\mu}{l}\dot{r} \tag{4.3.9}$$

下面，我们把上式再对 θ 求一次微商

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(-\frac{\mu}{l}\dot{r}\right)=\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-\frac{\mu}{l}\dot{r}\right)=-\frac{\mu}{l\dot{\theta}}\ddot{r}$$

同样用 $\dot{\theta}=l^2/\mu r^2$ 对上式进行代换得

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}=-\frac{\mu^2}{l^2}r^2\ddot{r} \tag{4.3.10}$$

所以，用 u 表示出 $\ddot{r}$ 和 $r\dot{\theta}^2$ 的解得

$$\left.\begin{aligned}\ddot{r}&=-\frac{l^2}{\mu^2}u^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}\\ r\dot{\theta}^2&=\frac{l^2}{\mu^2}u^3\end{aligned}\right\} \tag{4.3.11}$$

将式（4.3.11）代入式（4.3.7），得到经变量变换后的运动方程

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}+u=-\frac{\mu}{l^2}\frac{1}{u^2}F(u) \tag{4.3.12a}$$

方程（4.3.12a）也可写作

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}=-\frac{ur^2}{l^2}F(r) \tag{4.3.12b}$$

方程（4.3.12a）或（4.3.12b）正是我们所要求的有心力场的轨道方程，通常称为**毕耐公式**。它把质点所受的有心力、有心力场中的运动特征（角动量守恒）以及运动轨道联系在以 r 和 θ 为变量的一个微分方程之内，因而既可以用它由已知轨道 $r = r(\theta)$ 求有心力 $F(r)$ 的具体形式；也可以用它由已知有心力求运动轨道。尤其在我们已知轨道而希望求力的规律时特别有用。式中 $F(r)$ 的正负取决于有心力是斥力还是引力：斥力时为正号，引力时为负号。

4.4 运动轨道

在有心力场中运动的质点，其径向速度由式（4.3.1）给出。该方程指出，在

$$E - U(r) - \frac{l^2}{2\mu r^2} = 0 \tag{4.4.1}$$

的各点，$\dot{r}$ 为零。当然，这并不意味着质点停止（像在真正的一维运动的情况下那样），因为运动的角速度 $\dot{\theta}$ 并不变为零。等式 $\dot{r} = 0$ 表示轨道的**转变点**（参见 1.13 节的讨论），函数 $r(t)$ 在这一点从增加变为减小或者是相反的变化。

质点在有心力场中运动时，径向速度等于零的那些点又称为**拱点**。力心与拱点的连线称为**拱心线**。力心与拱点间的距离称为**拱点力心距**，简称**拱距**（见图 4.3），由方程（4.4.1）得出的 r 就是拱距，它实际上确定了运动的边界到力心的距离。

如果许可 r 变化的区间仅由一个条件 $r \geqslant r_{min}$ 限制，那么质点的运动则是无限的，即它的轨道从无穷远处来又回到无穷远处去。

一般说来，方程（4.4.1）有两个根：r_{max} 和 r_{min}。也就是说，r 的变化有两个边界 r_{min} 和 r_{max}，运动是有界的，而轨道则完全位于 $r = r_{max}$ 和 $r = r_{min}$ 两个圆所限制的环状区域内，即 $r_{max} \geqslant r \geqslant r_{min}$。只有当势函数 $U(r)$ 与参数 E 和 l 的某些组合恰使式（4.4.1）只产生一个根时，对任何时刻总有 $\dot{r} = 0$，因而 $r = \text{const}$，轨道是个圆。

如果质点在势场 $U(r)$ 中运动是周期性的，则轨道是**闭合的**。就是说，在径向极限 r_{min} 和 r_{max} 之间往返有限次之后，周而复始，完全重复原先的运动。反之，如果在有限次振荡之后，轨道不能自行闭合则称轨道是**开放的**，如图 4.3 所示。从式（4.3.4）我们可以计算当 r 从 r_{min} 到 r_{max} 再返回 r_{min} 的完整一周所引起的 θ 角的变化。由于运动对时间是对称的，这个角度变化是从 r_{min} 到 r_{max} 所引的 θ 角变化的两倍，因此

$$\Delta\theta = 2\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{\frac{l}{r^2}\mathrm{d}r}{\sqrt{2\mu\left(E - U - \frac{l^2}{2\mu r^2}\right)}} \tag{4.4.2}$$

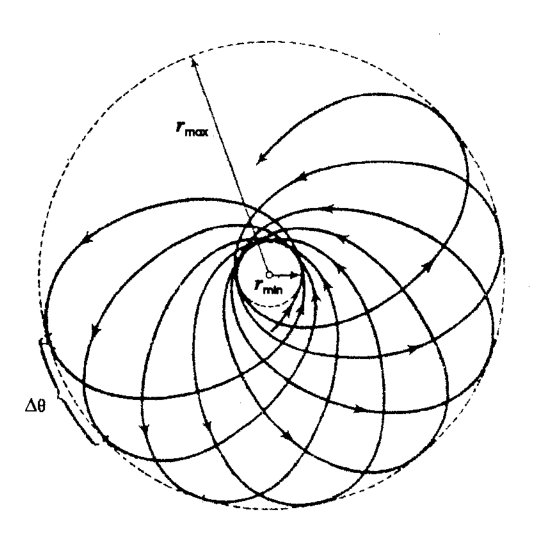


图 4.3 开放轨道示意图

轨道的闭合条件是要这个角度与 2π 之比为有理分数，即 $\Delta\theta = 2\pi(m/n)$，式中 m 和 n 均为整数。在此条件下，经过 n 个周期的时间，动点的位矢在转了 m 圈后，将与自己最初的值重合。自然，这种情况是罕见的，在任意形式的 $U(r)$ 的情况下，角度 $\Delta\theta$ 与 2π 之比很少是有理分数，因此在一般情况下，有限运动的轨道并不是闭合的，轨道无数次经过最大的和最小的距离，而在无限长的时间后填满由两个圆所限制的整个圆环。

式（4.3.1）中的平方根［以及式（4.3.2）和（4.3.5）的被积式］在转变点变号。如果角度 θ 从通过转变点的位矢方向算起，那么转变点两旁的轨道在 r 相同的每一个地方都相同，其区别仅在于 θ 的符号。这就是说，相对于上述方向，轨道是对称的。比如说，从 $r = r_{\max}$ 的点开始，经过一段轨道而到达 $r = r_{\min}$，在下一个 $r = r_{\max}$ 的点之前，将会对称地安置在同样一段轨道，如此类推。也就是说，整个轨道可以用向前和向后重复同样的一段来得到。

上面我们是就有限运动讨论的，实际上，由从转变点 $r = r_{\min}$ 伸向无穷远处的两个对称分支组成的无限运动亦是如此。

在中心力场中，只有两类中心力，一切有限运动的轨道才是闭合的，这就是质点的势能和 $1/r$ 及 r^2 成正比的场。第一种情况相应于平方反比力的情况，例

如万有引力和静电力，我们将在 4.6 节中研究；而第二种情况则和所谓**空间振子**相当。现在我们就来探讨空间振子运动。设质点在

$$U=\frac{1}{2}kr^2 \tag{4.4.3}$$

的有心力场内运动，我们来求解质点在这种场中运动的轨道。

正像在所有中心场内一样，运动是在一个平面内进行的，我们选择这个平面作为 xy 平面。每个坐标 x，y 的变动是有相同频率 $\omega=\sqrt{k/m}$ 的简谐振动

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos(\omega t+\alpha) \\ y &= b\cos(\omega t+\beta) \end{aligned}\right\} \tag{4.4.4}$$

引入记号

$$\theta=\omega t+\alpha,\qquad \delta=\beta-\alpha \tag{4.4.5}$$

则式（4.4.4）可改写为

$$\left.\begin{aligned} &x=a\cos\theta \\ &y=b\cos(\theta+\delta)=b\cos\delta\cos\theta-b\sin\delta\sin\theta \end{aligned}\right\} \tag{4.4.6}$$

由此确定 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$，并作成它们的平方和，便得到轨道方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2xy}{ab}\cos\delta=\sin^2\delta \tag{4.4.7}$$

这是力心在坐标原点的椭圆。当 $\delta=0$ 或者 π 时，轨道蜕化为一段直线。这种运动就是我们常说的空间振子。

4.5 离心势能和有效势能

在前面关于 $\dot{r}$，$\Delta\theta$ 的表达式中，一个共同的项是根式

$$\sqrt{E-U-\frac{l^2}{2\mu r^2}}$$

根式中最后一项具有能量的量纲，根据式（4.2.5），我们也可以把它写成

$$\frac{l^2}{2\mu r^2}=\frac{1}{2}\mu r^2\dot{\theta}^2 \tag{4.5.1}$$

如果我们把这个量

$$U_c\equiv\frac{l^2}{2\mu r^2} \tag{4.5.2}$$

作“势能”解释，那么与 U_c 相联系的“力”为

$$F_c=-\frac{\partial U_c}{\partial r}=\frac{l^2}{\mu r^3}=\mu r\dot{\theta}^2 \tag{4.5.3}$$

这个量传统上称为**离心力**，这个式子若以 $F_c=\mu r\omega^2$ 的形式表示也许更易辨认。

虽然它并非寻常意义上的力，不过，由于说起来方便，人们还是习惯于使用这个不甚恰当的术语。

既然把 F_c 视为离心力，很自然就把 $U_c=l^2/2\mu r^2$ 解释为质点的**离心势能**，并且与 $U(r)$ 一起包括在由下式定义的**有效势能**中

$$U_e(r)\equiv U(r)+\frac{l^2}{2\mu r^2} \tag{4.5.4}$$

有效势能 $U_e(r)$ 是一个虚设的势能，它把真实的势能函数 $U(r)$ 与和绕力心的角运动相联系的一项能量合并在一起。

对于平方反比律有心力场的运动，力由下式所决定

$$F(r)=-\frac{k}{r^2} \tag{4.5.5}$$

对力函数进行积分可求得势能

$$U(r)=-\int F(r)\mathrm{d}r=-\frac{k}{r}+c$$

设当 $r\to\infty$时，$U(\infty)=0$，于是得 $c=0$，所以

$$U(r)=-\frac{k}{r} \tag{4.5.6}$$

将式（4.5.6）代入式（4.5.4）得万有引力有效势能函数为

$$U_e(r)=-\frac{k}{r}+\frac{l^2}{2\mu r^2} \tag{4.5.7}$$

这个有效势能及其分量如图 4.4 所示。对曲线的形状我们在此稍做分析。从式(4.5.7) 可见，对于 r 较大的情况，式中第二项与第一项比较，可以忽略，有效势能 $U_e(r)$ 是负的。反之，对于 r 较小的情况，第二项超过第一项，$U_e(r)$ 变成正的。因此，在某一个 r 值，曲线经过最小值，随着 r 进一步减小，曲线急剧上升。

人们不禁要问：随着 $r\to0$，质点会“落”到力心上去吗？在 $l\neq0$ 的情况下，当 $r\to0$ 时，离心势能像 l/r^2 一样变成无穷大，它的存在通常使得运动的质点不能通过场的力心，即使力心本身具有吸引的特性也是如此。只有当 $r\to0$，而势能 $U(r)$ 又足够快地趋向于 $-\infty$时，质点“落”到中心才有可能。从不等式

$$\frac{\mu\dot{r}^2}{2}=E-U(r)-\frac{l^2}{2\mu r^2}>0$$

或

$$r^2U(r)+\frac{l^2}{2\mu}<Er^2$$

可得出结论，r 要有趋向于零的数值的可能，必须

$$r^2U(r)\Big|_{r\to0}<-\frac{l^2}{2\mu} \tag{4.5.8}$$

也就是说，$U(r)$ 应该像具有 $k>l^2/2\mu$ 的 $-k/r^2$ 一样趋向于 $-\infty$，或者是和具有 $n>2$ 的 $-1/r^n$ 成正比。

回顾在 1.13 节讨论质点在任意势阱中的运动，将那里的情况和这里的有效势能曲线对比，立刻可得出类似的结论。如果在与图 4.4 类似的图上画出质点的总能量 E，便可以鉴别出三个有意义的区域（见图 4.5）：

1）如果总能量是正的或者为零（例如 $E_1\geqslant 0$），则运动是无界的。质点从无限远处向力心（位于 $r=0$ 处）运动，直到在 $r=r_1$ 的转变点撞击到势垒后，再折返到 r 为无穷大处。注意：在任意的 r 处，如在图 4.5 中的 r_5 处，恒定的总能量线超出 $U_e(r)$ 线的高度等于 $\mu\dot{r}^2/2$。因此，在转变点（或各转变点）径向 $\dot{r}$ 为零，并且改变符号。

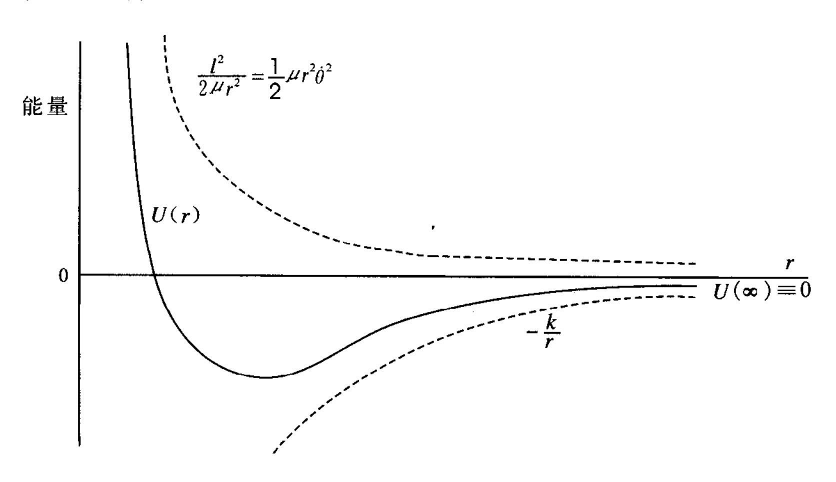


图 4.4 万有引力的有效势能

2）如果总能量是负的，且在零与 $U_e(r)$ 的最小值之间，比如 E_2，则运动是有界的，且被束缚在 r_2 与 r_4 之间，即 $r_2\leqslant r\leqslant r_4$。$r_2$ 和 r_4 的值为轨道的转变点。如果 E 等于有效势能的最小值（见图 4.5 中的 E_3），则质点轨道的半径限于单值 r_3，而对任何时候均有 $\dot{r}=0$，因此，此时运动轨道为圆。

我们现在要问，有效势能的最小值 $U_{e\,\min}$究竟是多少呢？这是个函数求极小值的问题，对式（4.5.7）求微商，然后再令所得的微商为零

$$\frac{\partial U_e(r)}{\partial r}=\frac{k}{r^2}-\frac{2l^2}{2\mu r^3}=0 \tag{4.5.9}$$

由上式解出

$$r=\frac{l^2}{\mu k} \tag{4.5.10}$$

将所得的式（4.5.10）的 r 值带入式（4.5.7）得有效势能的最小值

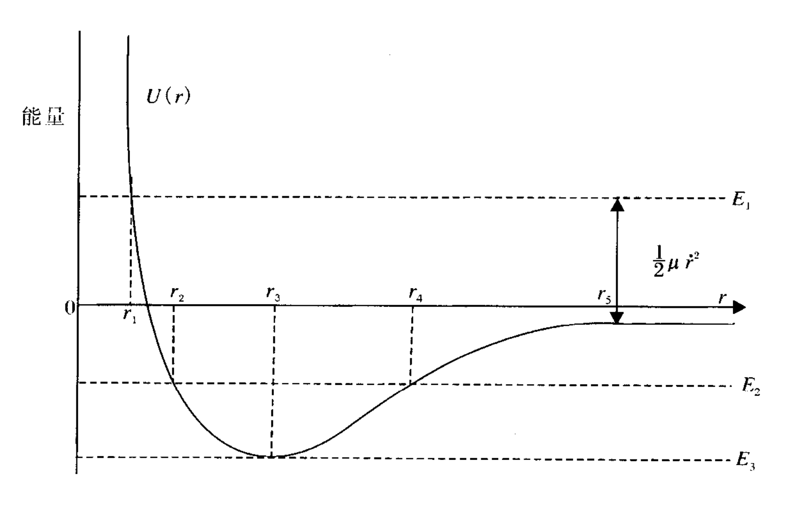


图 4.5　不同能量状态

$$U_{\mathrm{e\,min}}=-\frac{\mu k^2}{2l^2} \tag{4.5.11}$$

3）如果总能量 E 小于有效势能的最小值 $U_{\mathrm{e\,min}}=-\mu k^2/2l^2$，在物理的真实运动中不会产生，因为这时将有 $\dot{r}<0$，速度成为虚数了。

要强调的是，对不同能量轨道所做的讨论只涉及一个角动量值，改变 l 将使 $U_e(r)$ 曲线的定量细节有所变化，但不会影响轨道的一般分类。

4.6　开普勒问题

丹麦科学家第谷·布拉赫（Tycho Brahe）（1546～1601）曾对物理学和天文学作出杰出贡献，他在 20 多年的时间里考察并记录了当时所知道的行星轨道。在从来没有用过望远镜的情况下，他记录的精确度是惊人的。德国天文学家开普勒（Johannes Kepler）（1571～1630）分析了布拉赫的数据，并提出了下述定律：

第一定律：行星绕太阳做椭圆运动，太阳位于椭圆的一个焦点上。

第二定律：由太阳引向行星的连线在相等时间内扫过相等的面积。

第三定律：行星绕太阳运动周期的平方和轨道长半轴的立方成正比。

这些定律后来被人们称之为**开普勒行星运动定律**。开普勒第二定律又称**面积定律**，我们在本章第二节已讨论过。这些定律为后来牛顿提出的第二运动定律和万有引力定律奠定了基础。

力与 r^2 成反比，从而势能与 r 成反比的情况在有心力场中极为重要。牛顿万有引力场和库仑静电场就是这类场。众所周知，第一种场总是具有吸引的特

性；第二种场则可能是吸引场，也可能是排斥场。

根据式（4.3.5），在一个有心力场作用下运动的质点，如果力的大小与质点和力心距离的平方成反比，则运动方程可由下式得出

$$\theta(r)=\int\frac{\frac{l}{r^2}\mathrm{d}r}{\sqrt{2\mu\left(E+\frac{k}{r}-\frac{l^2}{2\mu r^2}\right)}}\tag{4.6.1}$$

像 4.3 节推导有心力场中运动方程一样，做变量替换，令

$$u=\frac{1}{r}\tag{4.6.2}$$

则积分式（4.6.1）不难求得，适当选择角度 θ 的计算起点，使得积分常数为零，我们将得到

$$\cos\theta=\frac{\frac{l^2}{\mu k}\cdot\frac{1}{r}-1}{\sqrt{1+\frac{2El^2}{\mu k^2}}}\tag{4.6.3}$$

引入如下的符号

$$p\equiv\frac{l^2}{\mu k},\qquad e\equiv\sqrt{1+\frac{2El^2}{\mu k^2}}\tag{4.6.4}$$

则轨道公式（4.6.3）可改写为

$$\frac{p}{r}=1+e\cos\theta\tag{4.6.5}$$

式（4.6.5）就是焦点在坐标原点的圆锥曲线方程，p 和 e 分别是轨道的**参数**和**偏心率**。而 $2p$ 称为轨道的**正焦弦**。从式（4.6.5）可以看出，r 的最小值 $r_{\min}$ 出现在 $\cos\theta$ 为最大值时，即 $\theta=0$ 时。因此，把式（4.6.1）的积分常数选取为零，就相当于从 $r_{\min}$ 开始测量 θ 角。这个点离力心最近，所以称为轨道的**近心点**；不言而喻，$r_{\max}$ 则称为轨道的**远心点**①。

在类似的情况下，当两个物体按规律

$$U=-\frac{k}{r}\tag{4.6.6}$$

相互作用时，其中任一质点的轨道都是焦点在共同质心的圆锥曲线。

按照偏心率（也就是能量 E）的不同数值，把轨道划分为不同的圆锥曲线（见图 4.6），在角动量 l 一定时，偏心率 e 和能量 E 与轨道形状的关系如表 4.1。

① 绕太阳运动的相应名称为**近日点**和**远日点**；而绕地球运动的相应名称则称为**近地点**和**远地点**。

表 4.1 e 和 E 与轨道形状的关系

偏心率 e	能量 E	轨道形状
$e>1$	$E>0$	双曲线
$e=1$	$E=0$	抛物线
$0<e<1$	$U_{e\min}<E<0$	椭圆
$e=0$	$E=U_{e\min}$	圆
$e<0$	$E<U_{e\min}$	（不许可）

对于行星运动，$E<0$，$e<1$，轨道是椭圆，按照 4.5 节所述，运动是有限的。根据大家都熟悉的解析几何学公式，椭圆的半长轴 a 和半短轴 b 由下式给出

$$\left.\begin{aligned} a&=\frac{p}{1-e^2}=\frac{k}{2|E|}\\ b&=\frac{p}{\sqrt{1-e^2}}=\frac{l}{\sqrt{2\mu|E|}}\end{aligned}\right\} \tag{4.6.7}$$

注意到式（4.6.4）中的第一式 $p=l^2/\mu k$，我们还可把短轴 b 写作

$$b=\sqrt{ap} \tag{4.6.8}$$

由式（4.6.7）可见，长轴仅仅依赖于能量 E，而短轴则是能量 E 和角动量 l 的函数，用参数 p，e，a 和 b 表示的椭圆轨道的几何图形如图 4.7 所示。F 和 F' 为焦点。由图可见拱心距（亦即距焦点最短和最长的距离）$r_{\min}$ 和 $r_{\max}$ 为

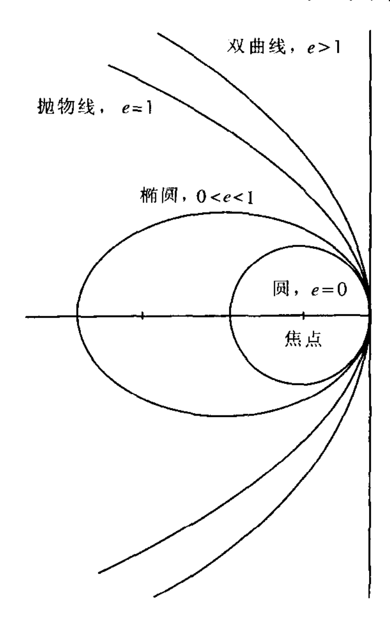


图 4.6 轨道的形状

$$\left.\begin{aligned} r_{\min} &= \frac{p}{1+e} = a(1-e) \\ r_{\max} &= \frac{p}{1-e} = a(1+e) \end{aligned}\right\} \tag{4.6.9}$$

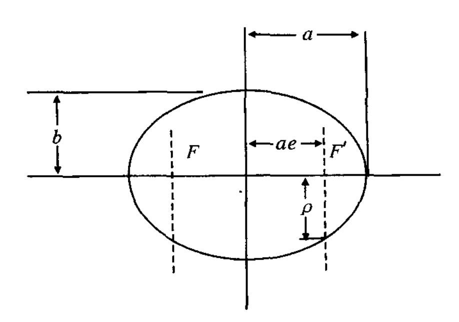


图 4.7 椭圆轨道

这些表达式当然也可以当作方程式 $U_e(r) = E$ 的根直接得到。

沿椭圆轨道运动一周的时间就是运动的周期 T。为了求出椭圆运动的周期，我们把面积速度公式（4.2.7）重新写作

$$\mathrm{d}t = \frac{2\mu}{l}\mathrm{d}A$$

由于在一个完整周期 T 内扫完椭圆的全部面积，所以

$$\int_0^T \mathrm{d}t = \frac{2\mu}{l}\int_0^A \mathrm{d}A$$

积分后得

$$T = \frac{2\mu}{l}A \tag{4.6.10}$$

椭圆面积已知为 $A = \pi ab$，将式（4.6.7）的 a 和 b 代入求得

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\mu}{l}\cdot\pi ab = \frac{2\mu}{l}\cdot\pi\cdot\frac{k}{2|E|}\cdot\frac{l}{\sqrt{2\mu|E|}} \\ &= \pi k\sqrt{\frac{\mu}{2}}|E|^{-\frac{3}{2}} \end{aligned} \tag{4.6.11}$$

由式（4.6.7）知，$a = k/2|E|$，利用这个关系可把周期 T 改写为

$$T^2 = \frac{4\pi^2\mu}{k}a^3 \tag{4.6.12}$$

这个结果，即周期的平方与椭圆轨道半长轴的立方成正比，称为**开普勒第三定律**。还应指出的是，周期只依赖于能量。

式（4.6.12）这个结果是就等效的单体问题而论的，故须注意式中出现的是折合质量 μ，开普勒对其结论的实际表述是：行星周期的平方与其轨道半长轴的立方成正比，且对所有行星具有相同的比例常数。在这个意义上，开普勒表述只是近似正确，原因是各个行星的折合质量是不同的，特别是，由于万有引力为

$$F(r) = -G\frac{mM}{r^2} = -\frac{k}{r^2}$$

我们定义 $k = GmM$，其中 m 为行星质量，M 为太阳质量。而折合质量为 $mM/(m+M)$。于是，周期平方的表达式变为

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G(m+M)}a^3 \approx \frac{4\pi^2}{GM}a^3 \qquad (m \ll M) \tag{4.6.13}$$

因此，仅当行星的质量 m 相对于太阳的质量视为是可以忽略时，开普勒的表述才是有效的。通常把 GM 写成某一常数的平方，即

$$K^2 = GM \tag{4.6.14}$$

K 是一个与行星无关只和太阳有关的量，叫做太阳的**高斯常数**。

当 $E \geqslant 0$ 时，运动是无界的，如果 $E>0$，那么偏心率 $e>0$，也就是说，轨道是绕力心（焦点）的双曲线，近心点到力心的距离

$$r_{\min} = \frac{p}{e+1} = a(e-1) \tag{4.6.15}$$

式中

$$a = \frac{p}{e^2-1} = \frac{k}{2E} \tag{4.6.16}$$

是双曲线的“半轴”。

当 $E=0$ 时，偏心率 $e=1$，也就是说，质点沿着近心点距离为

$$r_{\min} = \frac{p}{2} \tag{4.6.17}$$

的抛物线运动。如果质点自无穷远处由静止状态开始运动，就将出现这种情况。

现在我们来讨论斥力场中的运动，在此种场中

$$U(r) = \frac{k}{r} \tag{4.6.18}$$

式中，$k>0$。此时有效势能

$$U_e(r) = \frac{k}{r} + \frac{l^2}{2\mu r^2} \tag{4.6.19}$$

当 r 由零变到无穷大时，有效势能从正的无限大单调地下降到零。质点的能量只可能是正的，因而运动总是无界的。这种情形的计算完全与引力场的做法类似。由于 $E>0$，轨道是双曲线（当 $E=0$ 时是抛物线）

$$\frac{p}{r} = -1 + e\cos\theta \tag{4.6.20}$$

式中，p 和 e 仍由公式（4.6.4）决定。当质点从场的力心旁经过时，近心点的距离为

$$r_{\min} = \frac{p}{e-1} = a(e+1) \tag{4.6.21}$$

*4.7 有心力场的散射

4.7.1 微分散射截面

对于宏观物体，可以直接从所观察到的机械运动来推断物体之间力的作用规律，比如可以从行星对太阳的运动和牛顿定律来确定行星与太阳之间的相互作用力是万有引力。但是这种方法并不适用于微观粒子，如何由实验数据确定微观粒子间的相互作用的确切形式是当前物理学的前沿课题。在微观领域中是利用散射实验和引入称为散射截面的物理量来分析和处理这类问题的，一方面可以通过理论计算导出这些关系的公式，另一方面散射截面和散射角的关系又可以通过实验来测量，再把理论结果与实验数据对比，预言微观粒子之间相互作用的确切形式，从而推断微观粒子系统的内部结构。

当然，对于微观尺度上的粒子，就一定会预料到，经典理论的一些具体结果往往并不正确，因为这样一些领域的量子效应通常是巨大的。然而许多经典预言在适当近似下依然适用。更为重要的是，不论经典力学还是量子力学，描述散射现象的步骤都相同。在经典力学基础上同样能学会如何使用有关术语。

我们先按一般法则来研究一个等效问题，即一个质量为 μ 的粒子在力心不动的场 $U(r)$ 中的偏转问题。

向有心力场入射的粒子受到有心力场的作用后，一般将沿另一方向从有心力场中射出。入射方向与出射方向之间的夹角称为**散射角**，图 4.8 中的 Θ 角表示了反平方斥力场中的散射角。在 4.6 节已经指出，粒子在有心力场中的轨道，相对于通过轨道上离力心最近的点所作的直线（图中的 OA）是对称的。因此，轨道的两条渐近线和这条直线相交的角是一样的，如果用 θ_0 表示这个角，那么由图可见，粒子在飞过力心后的散射角是

$$\Theta = \pi - 2\theta_0 \tag{4.7.1}$$

根据式（4.3.5），θ_0 角可以由下面的积分来决定

$$\theta_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\frac{l^2}{r^2}\mathrm{d}r}{\sqrt{2\mu(E-U) - \frac{l^2}{r^2}}} \tag{4.7.2}$$

这里的积分是从粒子离力心的最近位置 $r_{\min}$到无限远的位置。

在我们这里所讨论的无限运动的情况下，采用粒子在无限远处的速度 v_∞和所谓**瞄准距离**（或称为**碰撞参数**）ρ 来代替常量E 和l 特别方便。瞄准距离是从力心向 v_∞方向所引垂线的长度，亦即这样的距离：如果力场不存在，则粒子以这样的距离从力心旁边经过（参见图 4.8），能量和角动量按下列方式通过这两个量表示

$$E = \frac{\mu v_\infty^2}{2}, \qquad l = \mu\rho v_\infty \tag{4.7.3}$$

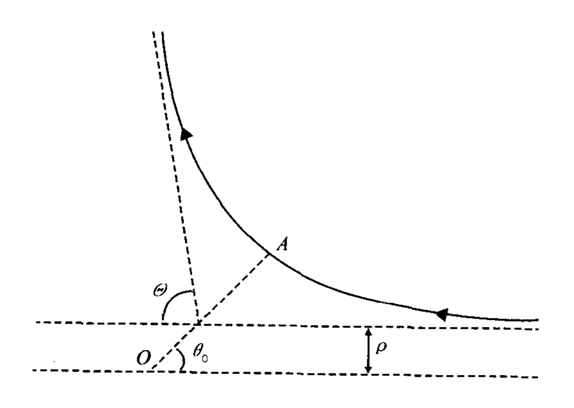


图 4.8　粒子的散射

将式（4.7.3）代入式（4.7.2），且被积函数的分子分母同除以 $\mu^2 v_\infty^2$得

$$\theta_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\frac{\rho}{r^2}\mathrm{d}r}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2U}{\mu v_\infty^2}}} \tag{4.7.4}$$

上式与式（4.7.1）联立确定 Θ 对ρ 的依赖关系。

在物理学中所遇到的问题，一般不是一个粒子的散射，而是落到散射中心具有相同速度的全同粒子流的散射，粒子流中不同的粒子有着不同的瞄准距离，从而也以不同的角度 Θ 散射。我们用 dN 表示单位时间在Θ 和$\Theta + \mathrm{d}\Theta$ 两个锥面之

间的立体角[①] $\mathrm{d}\Omega$ 内的散射粒子数。由于这个量依赖于粒子流的密度，用它描述散射过程的特性并不方便，于是人们引入了所谓**微分散射截面** σ[②]，其定义为

$$\sigma \mathrm{d}\Omega = \frac{\mathrm{d}N}{I} \qquad \text{或} \qquad \sigma = \frac{1}{I}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\Omega} \tag{4.7.5}$$

式中，I 是单位时间内通过与射束方向垂直的单位面积的粒子数，称为粒子入射**强度**（或通量密度）。之所以把 σ 称为"截面"只是因为它具有面积的量纲。它完全由散射场的形式所决定，是散射过程一个重要的特征量。

如果散射具有轴对称性（如我们正在讨论的有心力的情形），便立即对方位角做出积分而获得 2π，立体角元则可写作

$$\mathrm{d}\Omega = 2\pi \sin\Theta \mathrm{d}\Theta \tag{4.7.6}$$

如果散射角是瞄准距离的单调下降函数，则 Θ 和 ρ 间的关系是互为单值的。在这种情况下，进入 Θ 和 $\Theta + \mathrm{d}\Theta$ 之间立体角 $\mathrm{d}\Omega$ 内散射的只是瞄准距离在一定区间 $\rho(\Theta)$ 和 $\rho(\Theta) + \mathrm{d}\rho(\Theta)$ 内的粒子。这些粒子的数目等于粒子入射强度 I 与半径为 ρ 和 $\rho + \mathrm{d}\rho$ 两圆环间环形面积的乘积。所以

$$2\pi I \rho \mid \mathrm{d}\rho \mid = 2\pi \sigma(\Theta) I \sin\Theta \mid \mathrm{d}\Theta \mid \tag{4.7.7}$$

式（4.7.7）中引进了绝对值符号，这是因为粒子数必须始终为正数，而 ρ 和 Θ 的变化方向常常相反。如果把 ρ 看作是能量和相应散射角的函数，即

$$\rho = \rho(\Theta, E) \tag{4.7.8}$$

则微分截面对 Θ 的依赖关系为

$$\sigma(\Theta) = \frac{\rho(\Theta)}{\sin\Theta}\left|\frac{\mathrm{d}\rho(\Theta)}{\mathrm{d}\Theta}\right| \tag{4.7.9}$$

4.7.2 卢瑟福散射截面公式

前面所得到的微分散射截面公式的重要应用之一是研究带电粒子在库仑场内的散射，亦即静电场中的散射，这种情形的势能为

$$U(r) = \frac{k}{r} \tag{4.7.10}$$

---

① 立体角 Ω 定义为半径为 r 的球面部分面积与半径平方的比

$$\Omega = \frac{A}{r^2}$$

在球面坐标中立体角元由下式给出

$$\mathrm{d}\Omega = \mathrm{d}\varphi \sin\theta \mathrm{d}\theta$$

正如我们所期望的，对于整个球面言

$$\frac{4\pi r^2}{r^2} = \Omega = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta \mathrm{d}\theta = 2\pi \times 2 = 4\pi$$

② 有的著作把 $\mathrm{d}\sigma = \sigma \mathrm{d}\Omega$ 称为微分散射截面，而把 σ 称为单位立体角的散射截面。

将该势能代入式（4.7.4）即得

$$\theta_0=\int_{r_{\min}}^{\infty}\frac{\frac{\rho}{r^2}\mathrm{d}r}{\sqrt{1-\frac{\rho^2}{r^2}-\frac{2k}{\mu v_\infty^2 r}}} \tag{4.7.11}$$

注意到积分下限 $r_{\min}$就是式中根号内表达式的根。对式（4.7.11）进行具体积分计算可得

$$\cos\theta_0=\frac{\frac{k}{\mu v_\infty^2\rho}}{1+\left(\frac{k}{\mu v_\infty^2\rho}\right)^2} \tag{4.7.12}$$

式（4.7.12）经简单运算可以写作

$$\rho^2=\frac{k^2}{\mu^2 v_\infty^4}\tan^2\theta_0 \tag{4.7.13}$$

根据式（4.7.1）引入 $\theta_0=(\pi-\Theta)/2$，则上式成为

$$\rho^2=\frac{k^2}{\mu^2 v_\infty^4}\cot^2\frac{\Theta}{2} \tag{4.7.14}$$

将此式对 Θ 微商并代入式（4.7.9）便得

$$\sigma=\left(\frac{k}{2\mu v_\infty^2}\right)^2\left(\sin\frac{\Theta}{2}\right)^{-4} \tag{4.7.15}$$

这就是著名的**卢瑟福散射截面公式**。它说明质心系散射截面与散射角半角正弦的四次方成反比。应该指出，散射截面不依赖于 k 的符号，所得的结果对于斥力或引力的库仑场都是相同的。还值得注意的是，对库仑散射的量子力学处理得出了与经典推导完全相同的结果①。

在实际问题中，力场往往不是事先知道的，微观粒子的场尤其如此。如果根据式（4.7.5），通过实验测得的 σ 与 Θ 关系满足式（4.7.15），则可以断定，所探讨的力场就是反平方斥力场。在历史上，盖革和马斯敦正是利用这种方法通过 α 粒子被金箔中的原子散射实验证实了原子的核模型。

4.7.3　总散射截面

微分散射截面在空间所有方向形成的整个 4π 立体角的积分称为**总散射截面** σ_t，即

① 玻尔（N.Bohr）证明，这两种方法得出完全一致的结果是由于力为 $1/r^2$ 性质的缘故，对于任意其他形式的定律，不能期待两种方法得出相同的结果。

$$\sigma_t = \int_{\Omega} d\Omega = \int d\sigma \tag{4.7.16}$$

或者

$$\sigma_t = \int_0^{\pi} \sigma(\Theta) \cdot 2\pi\sin\Theta d\Theta \tag{4.7.17}$$

σ_t 的下标 t 是英文 total 的第一字母。注意式（4.7.5）中的 $\sigma d\Omega$ 就是 $d\sigma$。由于进入 Θ 到 $\Theta + d\Theta$ 立体角元 $d\Omega$ 的粒子数 dN 等于半径 ρ 到 $\rho + d\rho$ 的环形面积乘以粒子入射强度 I，即 $dN = 2\pi\rho d\rho \cdot I$，将它代入式（4.7.5）即得

$$d\sigma = 2\pi\rho d\rho \tag{4.7.18}$$

如果以 ρ_0 表示散射得以发生的最大瞄准距离，则总散射截面也可以表示为

$$\sigma_t = \int_0^{\rho_0} 2\pi\rho d\rho = \pi\rho_0^2 \tag{4.7.19}$$

可见总散射截面的几何意义是，它是力心对入射粒子的一块圆形有效面积，凡是穿过这块有效截面的入射粒子都将被散射，而在这块有效截面范围外掠过的入射粒子都不会受力场的作用，所以不改运动方向。也正因为如此，散射截面也称为**有效截面**。

卢瑟福散射的总截面是

$$\sigma_t = \int_0^{\pi} \left(\frac{k}{2\mu v_\infty^2}\right)^2 \left(\sin\frac{\Theta}{2}\right)^{-4} \cdot 2\pi\sin\Theta d\Theta = \infty$$

这说明，不管入射粒子的瞄准距离有多大都必将被散射。

在有心力问题中，总散射截面取有限值的力称为**短程力**，否则就称为**长程力**。卢瑟福散射的总截面等于无穷大，说明反平方斥力是长程力。

4.7.4 散射截面变换到实验室坐标系

前面所说的在力心固定的有心力场中的散射，实际上是二体问题中的折合质量粒子相对于靶核的散射，其中 Θ 是相对于靶核而言的散射角。在实验室坐标系中，靶核由于受入射粒子的反作用发生运动，所以并不像前面所讨论的那样，被看成一个不动的力心。在实验室坐标系中，散射角不是 Θ 而是图 4.9 中的 θ_1。实验室中实际测量的散射角 θ_1 是被散射的粒子的最终方向和入射方向之间的夹角。另一方面，根据等效单体问题来计算的角度 Θ 却是两粒子间相对矢量的最终方向与初始方向之间的夹角。只有当第二个粒子在整个散射过程中保持静止时，这两种角度才是一致的。但一般说来，第二个质点虽然原来是静止的，但它将被两粒子间的相互作用力所推动，因而像图 4.9 所示，这两个角度的值并不相同。所以在实验室坐标系内测量时，从等效单体问题不能直接测得散射角。

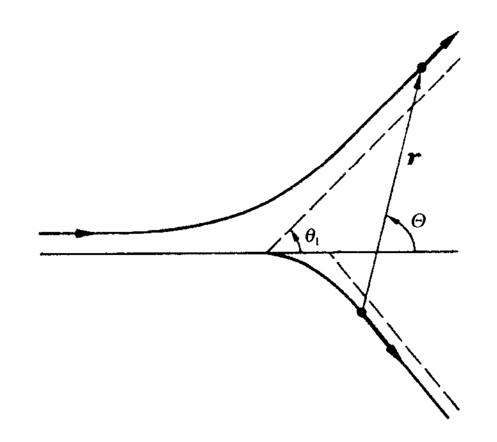


图 4.9 实验室坐标系内观察到的两粒子的散射

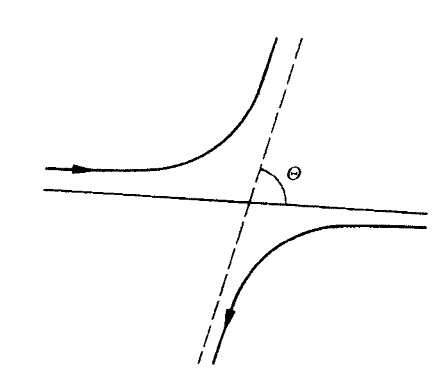


图 4.10 质心坐标系观察到的两个粒子的散射

为确定两个散射角 Θ 和 θ_1 之间的关系，我们来研究一下与两个粒子的质心一起运动的坐标系内发生的情况。在这种坐标系内的总线动量为零，两个粒子始终以等值反向的动量运动。图 4.10 说明了质心系中观察者所看到的散射过程。散射前，两个粒子相向而来，散射后又背向而去。因而，相对矢量的最终方向与初始方向的夹角 Θ，必定与其中任一粒子在质心系中的散射角相等。所以需要考虑质心坐标与实验室坐标之间的变换，才能得到两个散射角 Θ 和 θ_1 之间的关系。

依照式（4.7.5）的定义，在实验室坐标系中，微分散射截面的定义为

$$\sigma_1 = \frac{1}{I}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\Omega_1} \tag{4.7.20}$$

I 仍然是前面所定义的入射强度，立体角元 $\mathrm{d}\Omega_1 = 2\pi\sin\theta_1|\mathrm{d}\theta_1|$，$\mathrm{d}N$ 是单位时间内散射到立体角 $\mathrm{d}\Omega_1$ 中的粒子数，也就是单位时间内散射到立体角 $\mathrm{d}\Omega = 2\pi\sin\Theta|\mathrm{d}\Theta|$ 的粒子数，把上式与式（4.7.5）相比较后得

$$\sigma\mathrm{d}\Omega = \sigma_1\mathrm{d}\Omega_1\left(=\frac{\mathrm{d}N}{I}\right)$$

亦即

$$2\pi\sigma(\Theta)\sin\Theta\,|\,\mathrm{d}\Theta\,| = 2\pi\sigma_1(\theta_1)\sin\theta_1\,|\,\mathrm{d}\theta_1\,|$$

由此得

$$\sigma_1(\theta_1) = \sigma(\Theta)\frac{\sin\Theta}{\sin\theta_1}\left|\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta_1}\right| = \sigma(\Theta)\left|\frac{\mathrm{d}\cos\Theta}{\mathrm{d}\cos\theta_1}\right| \tag{4.7.21}$$

确定了 Θ 与 θ_1 之间的函数关系以后，即可根据式（4.7.21）由 $\sigma(\Theta)$ 求 $\sigma_1(\theta_1)$。

如果已知入射粒子的质量 m_1 和靶核的质量 m_2，即可求出 Θ 与 θ_1 之间的关系。假设靶核最初静止不动。注意：入射粒子和靶核两粒子质心的运动方向与入射粒子的运动方向相同。所以在质心系中的散射角就是二体问题中相对运动的散射角 Θ（见图 4.9）。因此 Θ 与 θ_1 之间的函数关系就是 1.15 节的式（1.15.14），即

$$\tan\theta_1 = \frac{\sin\Theta}{\cos\Theta + m_1/m_2} \tag{4.7.22}$$

但是，要直接利用此式去计算式（4.7.21）并不方便。于是，我们从坐标变换寻找更为方便计算的 Θ 和 θ_1 之间关系的表达式。

设 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_1$ 是散射后入射粒子 1 在实验室系中的位置和速度；$\boldsymbol{r}_1'$ 和 $\boldsymbol{v}_1'$ 是散射后粒子 1 在质心系中的位置和速度；$\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{V}$ 则是两粒子的质心在实验室系中的位置和（恒定）速度。根据定义

$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_1' + \boldsymbol{R} \tag{4.7.23}$$

对上式求微商得

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_1' + \boldsymbol{V} \tag{4.7.24}$$

图 4.11 以图解方式描绘了散射发生以后这种矢量关系，$\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_1'$ 分别与初始方向上的矢量 $\boldsymbol{V}$ 的夹角就是 θ_1 和 Θ。由于实验室系中的靶原来是静止的，所以粒子 1 在该系中的入射速度 $\boldsymbol{v}_0$ 与两粒子原来的相对速度相同。由于总动量守恒，所以质心的恒定速度可由下式决定

$$(m_1 + m_2)\boldsymbol{V} = m_1\boldsymbol{v}_0$$

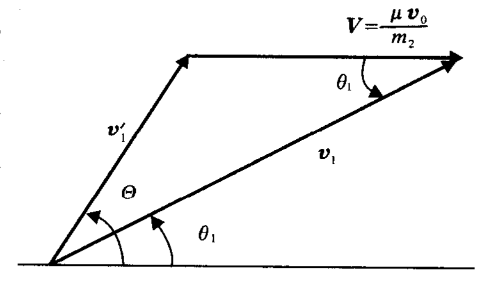


图 4.11 质心系和实验室中速度间的关系

由此得

$$\boldsymbol{V} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\boldsymbol{v}_0 = \frac{\mu}{m_2}\boldsymbol{v}_0 \tag{4.7.25}$$

从图 4.11 中不难看出

$$v_1\sin\theta_1 = v_1'\sin\Theta \tag{4.7.26}$$

以及

$$v_1\cos\theta_1 = v_1'\cos\Theta + V \tag{4.7.27}$$

式（4.7.26）与（4.7.27）之比即给出 θ_1 和 Θ 之间的关系

$$\tan\theta_1 = \frac{\sin\Theta}{\cos\Theta + \beta} \tag{4.7.28}$$

式中，β 定义为

$$\beta=\frac{\mu v_0}{m_2 v_1'} \tag{4.7.29}$$

把余弦定理应用于图 4.11 的三角形，就能用其他速度表示出 v_1，从而可得另一关系式

$$v_1^2 = v_1'^2 + V^2 + 2v_1' V\cos\Theta \tag{4.7.30}$$

利用此式从式（4.7.27）中消去 v_1'，并根据式（4.7.25）用 v_0 表示 V，得到

$$\cos\theta_1=\frac{\cos\Theta+\beta}{\sqrt{1+2\beta\cos\Theta+\beta^2}} \tag{4.7.31}$$

这些关系式依然通过 β 包含速度之比。根据质心的定义，粒子 1 在质心系的速度 v'_1与相对速度 v 的关系决定于方程［参见式（4.1.6)］

$$v_1'=\frac{\mu}{m_1}v$$

因此，β 也可写成

$$\beta=\frac{m_1 v_0}{m_2 v} \tag{4.7.32}$$

应该强调指出，式中的 v 是碰撞后的相对速率。如果碰撞是**弹性的**，两粒子的总动能保持不变，v 必定等于 v_0，即 $v=v_0$，从而

$$\beta=\frac{m_1}{m_2} \qquad \text{（弹性碰撞）} \tag{4.7.33}$$

这一简单的关系说明，在弹性碰撞的情况下，β 与能量或速率无关①。这种情况下式（4.7.28）就是式（4.7.22）。

将式（4.7.31）代入式（4.7.21），计算结果为

$$\sigma_1(\theta_1) = \sigma(\Theta)\cdot\frac{(1+2\beta\cos\Theta+\beta^2)^{3/2}}{1+\beta\cos\Theta} \tag{4.7.34}$$

也许应该强调的是，$\sigma(\Theta)$ 不是观测者在质心系中测得的截面。$\sigma(\Theta)$ 和 $\sigma(\theta)$ 都是实验室系中测得的截面，它们只是用不同的坐标系表示而已。

当两个粒子的质量相等时，弹性散射中两个散射角之间的关系特别简单。由于此时 $\beta=1$，根据式（4.7.31）即得

$$\cos\theta_1=\sqrt{\frac{1+\cos\Theta}{2}}=\cos\frac{\Theta}{2}$$

由此得

$$\theta_1=\frac{\Theta}{2} \qquad (\beta=1) \tag{4.7.35}$$

① 如果碰撞是非弹性的，两个粒子的总动能将变化，例如某种动能变成靶的内部激发能的形式。

因此，对于质量相等粒子的散射，在实验室系中不可能出现大于 90°的散射角。所有散射只可能发生在前半球内。相应地，散射截面由式（4.7.34）用 Θ 给出

$$\sigma_1(\theta_1) = 4\cos\theta_1 \cdot \sigma(\Theta) \qquad \theta_1 \leqslant \frac{\pi}{2} \qquad (\beta = 1) \tag{4.7.36}$$

即使散射中对 Θ 来说是各向同性的，即 $\sigma(\Theta)$ 是与 Θ 无关的常数，用 θ_1 表示的截面也将按角度的余弦规律变化。

我们看到，即使在总动能保持常数，而靶最初又是静止的弹性碰撞中，碰撞结果也有一部分动能传输给靶粒子，而使入射粒子的动能相应减少。换句话说，碰撞使入射粒子慢化了。慢化的程度可从式（4.7.30）得到，只要分别根据式（4.7.29）和（4.7.25）用 v_0 表示 v_1' 和 V 即可得到

$$\frac{{v_1}^2}{{v_0}^2} = \left(\frac{\mu}{m_2\beta}\right)^2 (1 + 2\beta\cos\Theta + \beta^2) \tag{4.7.37}$$

对于弹性碰撞，$\beta = m_1/m_2$，上式中的 $(\mu/m_2\beta)^2$ 很容易化为 $(1+\beta)^{-2}$，于是式（4.7.35）可改写为

$$\frac{E_1}{E_0} = \frac{1 + 2\beta\cos\Theta + \beta^2}{(1+\beta)^2} \qquad \text{（弹性碰撞）} \tag{4.7.38}$$

式中，E_0 是实验室系中入射粒子的初动能，E_1 是散射后相应的能量。当粒子质量相等时，则上式变为

$$\frac{E_1}{E_0} = \frac{1 + \cos\Theta}{2} = \cos^2\theta_1 \tag{4.7.39}$$

显然，当 $\Theta = \pi$，$\theta_1 = \pi/2$ 时，$\cos(\pi/2) = 0$，即 $E_1 = 0$。因此，在实验室系中，具有最大散射角（$\Theta = \pi$，$\theta_1 = \pi/2$）的入射粒子将失去其全部能量而完全停止下来。这种由散射引起的动能转移就是热中子反应堆的“减速剂”所依据的原理。

从上面的计算过程我们看到，从实验室坐标系变换质心坐标系的计算，以及动能转移的计算，涉及的经典力学既不特别高深也不怎么困难。所用到的只不过是动量和能量守恒定律。也正是由于这些极为基本的性质，使得这里的计算和所得的结论具有广泛的适用性。

习　题

4.1　根据汤川核力理论，中子与质子之间的引力具有如下形式的势能

$$U(r) = \frac{k\mathrm{e}^{-\alpha r}}{r}, \qquad (k < 0)$$

试求

(a) 中子与质子间的引力表达式，并与平方反比定律相比较；

(b) 求质量为 m 的粒子做半径为 a 的圆运动的角动量 L 及能量 E。

[答]

(a) $F=\dfrac{k(1+\alpha r)\mathrm{e}^{-\alpha r}}{r^2}$

(b) $L^2=-mka(1+\alpha a)\mathrm{e}^{-\alpha a}$, $\quad E=\dfrac{k(1-\alpha a)\mathrm{e}^{-\alpha a}}{2a}$

4.2 一质点受一与距离的$\frac{3}{2}$次方成反比的引力作用在一直线上运动，试证此质点自无穷远到达 a 时的速率和自 a 静止出发到达$\frac{a}{4}$时的速率相同。

4.3 试推导下面有心力量值的公式

$$F=\frac{mh^2}{2}\frac{\mathrm{d}\rho^{-2}}{\mathrm{d}r}$$

式中，m 为质点的质量，r 为质点到力心的距离，$h=r^2\dot{\theta}=$常数，ρ 为力心到轨道切线的垂直距离。

4.4 质点在有心力作用下运动。此力的量值为质点到力心距离 r 的函数，而质点的速率则与此距离成反比，即 $v=\frac{a}{r}$。如果 $a^2>h^2$，此处 $h=r^2\dot{\theta}$，试求质点的轨道方程。设当 $r=r_0$ 时，$\theta=0$。

[答] $\ln\dfrac{r}{r_0}=\pm\dfrac{\sqrt{a^2-h^2}}{h}\theta$ 或 $r=r_0\mathrm{e}^{\pm\frac{\sqrt{a^2-h^2}}{h}\theta}$，质点的轨道为一对数螺旋线。

4.5 试证在力与距离平方成反比的椭圆运动中，动能对时间的平均值等于势能对时间平均值的一半。

4.6 (a) 某彗星的轨道为抛物线，其近日点距离为地球轨道（假定为圆形）半径的$\frac{1}{n}$。则此彗星运行时，在地球轨道内停留的时间为一年的

$$\frac{2}{3\pi}\frac{n+2}{n}\sqrt{\frac{n-1}{2n}}$$

倍，试证明之。

(b) 试再证明任何抛物线轨道的彗星停留在地球轨道（仍假定为圆形）内的最长时间为一年的$\frac{2}{3\pi}$倍，或约为 76 日。

4.7 质量为 m 的质点在有心斥力场$\frac{mc}{r^3}$中运动，式中 r 为质点到力心 O 的距离，c 为常数。当质点离 O 很远时，质点的速度为 v_∞，而其渐近线与 O 的垂直距离则为 ρ（即瞄准距离）。试求质点与 O 的最近距离 a。

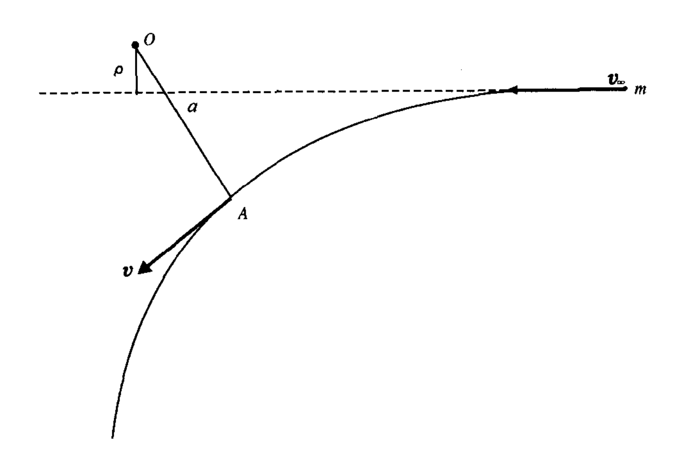
[答] $a=\left(\rho^2+\dfrac{c}{v_\infty^2}\right)^{\frac{1}{2}}$

4.8 如质点受有心力作用而做圆

$$r=2a\cos\theta$$

运动时，则

$$F=-\frac{8ma^2h^2}{r^5}$$



题 4.7 图

试证明之。式中 $h=r^2\dot{\theta}$。

4.9　质点受有心力作用而做双纽线

$$r^2=a^2\cos\theta$$

的运动时，则

$$F=-\frac{3ma^4h^2}{r^7}$$

试证明之。式中 $h=r^2\dot{\theta}$。

4.10　如 $\dot{S}_a$ 及 $\dot{S}_p$ 为质点在远日点及近日点处的速率，试证

$$\dot{S}_p:\dot{S}_a=(1+e):(1-e)$$

式中，e 为离心率。

4.11　试求在力与距离平方成反比的问题中，总能量 E 与离心率 e 之间的关系。

[答]　$e=\sqrt{1+\dfrac{2h^2E}{k^4m}}$，　　式中 $h=r^2\dot{\theta}$

第五章　非惯性系中的运动

5.1　选用非惯性系的必要性

迄今为止，在研究力学系统运动时，我们一直选择惯性计算系统。只有在惯性系中，比如说，一个质点在外力场中运动，其拉格朗日函数才有如下的形式

$$L=\frac{m\boldsymbol{v}^2}{2}-U \tag{5.1.1}$$

相应地，也才有如下形式的运动方程

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}} \tag{5.1.2}$$

当然，在一惯性系中描述一个系统的运动总是可能的。但是，有些类型的问题，在惯性系中方程极其复杂，而在一非惯性系中研究倒变得容易一些。

例如，为了描述位于地球表面或其附近质点的运动，显然选择与地球固接的坐标系是比较好的选择。然而我们知道，相对于与某不动的恒星固接的惯性系来看，地球在做着包含多种转动的复杂运动（和因此而产生的加速度）。所以，地球坐标系是非惯性参考系。虽然许多问题的解在期望的精确度范围内可以忽略这种差别，但是，由于地球坐标系的非惯性本质引起的许多重要效应，在有些问题中却是必须考虑的。

本章我们将要研究在非惯性系中质点的运动方程是什么样的形式。解决这一问题的出发点仍然是最小作用量原理，它的应用范围不受选择坐标系的限制，同时拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}}=\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}} \tag{5.1.3}$$

也照样有效。然而拉格朗日函数已不再具有式（5.1.1）的形式了。为求得非惯性系中的拉格朗日函数，必须做适当的变换。

5.2　平动坐标系

设坐标系 K'相对于惯性坐标系 K 以速度 $\boldsymbol{V}(t)$ 移动。质点相对于坐标系 K 和K'的速度分别为 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{v}'$，二者之间以下式联系

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{V} \tag{5.2.1}$$

将此式代入式（5.1.1），得到坐标系 K'中的拉格朗日函数

$$L' = \frac{m\boldsymbol{v}'^2}{2} + m\boldsymbol{v}'\boldsymbol{V} + \frac{m}{2}\boldsymbol{V}^2 - U \tag{5.2.2}$$

然而，$\boldsymbol{V}^2(t)$ 是已知的时间函数，可把它写成另外某一函数对 t 的全微商，由 2.5 节知，拉格朗日函数的准确度是到可以加上时间和坐标的任意函数的全微商。因此，式（5.2.2）中的第三项可以去掉。此外，由于

$$\boldsymbol{v}' = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t}$$

其中，$\boldsymbol{r}'$是质点在坐标系K'中的位矢，所以式（5.2.2）中的第二项可写成

$$m\boldsymbol{v}'\boldsymbol{V} = m\boldsymbol{V}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\boldsymbol{V}\boldsymbol{r}') - m\boldsymbol{r}'\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t}$$

把此式代入拉格朗日函数式（5.2.2）中，再次去掉其中对时间的全微商，最后得到

$$L' = \frac{m\boldsymbol{v}'^2}{2} - m\dot{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{r}' - U \tag{5.2.3}$$

将所得到的拉格朗日函数式（5.2.3）代入拉格朗日方程（5.1.3）得

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}'}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}'} - m\dot{\boldsymbol{V}} \tag{5.2.4}$$

我们看到，从对于质点运动方程的影响的意义上来说，坐标系的加速运动与一个均匀力场的出现等价，而且在这个场中的作用力等于加速度和粒子质量的乘积，但方向则和加速度的方向相反。若令

$$\boldsymbol{a}_0 = \dot{\boldsymbol{V}} \tag{5.2.5}$$

即用 $\boldsymbol{a}_0$ 表示 K'系相对于K 系的加速度，这就是质点被 K'系带着一起运动时获得的加速度，称为**牵连加速度**。因而（$-m\boldsymbol{a}_0$）这一项称为**牵连惯性力**。而式（5.2.4）右端的第一项是真实力，真实力对于任何参考系的观察者来说都是一样的。因而式（5.2.4）又可写成

$$m\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{F} - m\boldsymbol{a}_0 \tag{5.2.6}$$

5.3 转动坐标系

让我们来考虑两套坐标系，其中一个是“固定”的，或者说是惯性的；另一个坐标系相对于惯性系是运动的。我们将分别以“固定”（fixed）和“转动”（rotating）坐标系来称呼它们。设以 x'_i 表示固定坐标系中的坐标，而以 x_i 表示转动坐标系中的坐标（注意与以前研究平动坐标系符号标记上的区别）。若我们取 P 点如图 5.1 所示。显然有

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{r} \tag{5.3.1}$$

其中，$\boldsymbol{r}'$是固定坐标系中P 点的位矢，$\boldsymbol{r}$ 是转动坐标系中P 点的位矢。$\boldsymbol{R}$ 是由固

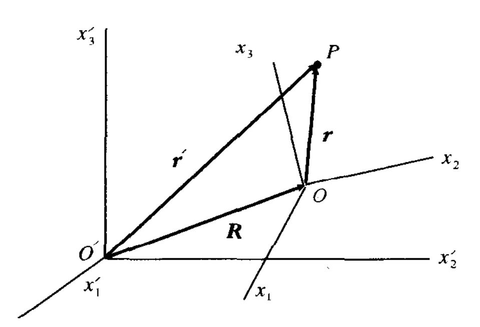


图 5.1　不同坐标系间的矢量关系

定坐标系的原点指向转动坐标系原点的位矢，它定出转动坐标系的原点在固定坐标系中的位置。

一个任意无穷小位移，总可以用绕某个轴的纯转动来表示，这个轴叫**瞬时转动轴**。例如，一个沿斜面滚动的圆盘的瞬时运动，可以用绕着圆盘和斜面接触点的转动来描述。因此，若 x_i 系经受一无穷小转动 $d\theta$，P 点的运动（我们暂时把它看作在 x_i 系中是静止的）相当于某个无穷小的位移，可以用式（2.12.1）写作

$$(\mathrm{d}\boldsymbol{r})_{\mathrm{f}}=\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{r} \tag{5.3.2}$$

式中，下标 f 是英文 fixed 的缩写，表示“固定”，用以指明 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 是在 x_i' 系（固定坐标系）观测的。固定坐标系我们也常称为静止坐标系，简称静系。用发生无穷小转动的时间间隔 $\mathrm{d}t$ 去除上式，我们得到在固定坐标系中测得的 $\boldsymbol{r}$ 随时间的变化率

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{f}}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{r} \tag{5.3.3}$$

由于转动的角速度为

$$\boldsymbol{\omega}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}}{\mathrm{d}t} \tag{5.3.4}$$

所以

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{f}}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} \tag{5.3.5}$$

这个速度是对于固定在 x_i 系中的 P 点而言的。

如果我们现在计及 P 对 x_i 系有一速度 $(\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t)_{\mathrm{r}}$（下标 r 是英文 rotating 的第一个字母，表示 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t$ 是在转动坐标系中测量），那么这个速度必须再加上 $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$ 才得到在固定坐标系中随时间的变化率

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{f}}=\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{r}}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} \tag{5.3.6}$$

虽然在导出式（5.3.6）时选择了位矢 $\boldsymbol{r}$，然而这个表达式的正确性并不限于矢量 $\boldsymbol{r}$。事实上，对任意一个矢量 $\boldsymbol{Q}$ 均有

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Q}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{f}}=\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Q}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{r}}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{Q} \tag{5.3.7}$$

式（5.3.7）是两个坐标系之间的时间微商变换方程，推导过程中对矢量没有施加任何条件。为了强调 Q 的任意性，可以把方程（5.3.7）写成作用于某个给定矢量的算符方程

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{f}}=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{r}}+\boldsymbol{\omega}\times \tag{5.3.8}$$

例如，我们注意到，角加速度 $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ 在固定坐标系和转动坐标系都是一样的

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{f}}=\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{r}}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}=\dot{\boldsymbol{\omega}} \tag{5.3.9}$$

由于 $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}$ 为零，所以 $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ 表示在两个坐标系中的共同的角加速度值。

算符方程（5.3.8）现在也可用来获取在固定坐标系中测得的 P 点速度的表达式。由式（5.3.1）我们有

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{f}}=\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{f}}+\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{f}} \tag{5.3.10}$$

因此

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{f}}=\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{f}}+\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{r}}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} \tag{5.3.11}$$

若令

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{f}}=\dot{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{f}}=\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{f}} \tag{5.3.12a}$$

$$\boldsymbol{V}=\dot{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{f}}=\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{f}} \tag{5.3.12b}$$

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}=\dot{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{r}}=\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{r}} \tag{5.3.12c}$$

于是，我们可以把式（5.3.11）写为

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{f}}=\boldsymbol{V}+\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} \tag{5.3.13}$$

其中

$\boldsymbol{v}_{\mathrm{f}}$ = 质点相对于固定坐标系的速度；

$\boldsymbol{V}$ = 运动坐标系原点移动的线速度；

$\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$ = 质点相对于转动坐标系的速度；

ω = 转动坐标系的角速度；

$\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$ = 由于运动坐标系转动引起的速度。

通常把式（5.3.13）分解为两部分

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{f}}=\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}+\boldsymbol{v}_{\mathrm{e}} \tag{5.3.14}$$

其中

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{e}}=\boldsymbol{V}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} \tag{5.3.15}$$

叫**牵连速度**。$\boldsymbol{v}_{\mathrm{f}}$ 通常也叫**绝对速度**。$\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$ 称为**相对速度**。

5.4 科里奥利力

5.4.1 科里奥利力

如前所述，牛顿方程 $\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$ 只有在惯性参考系才成立。因此作用在一个质点上的力的表达式可以从下式得到

$$\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}_{\mathrm{f}}=m\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\mathrm{f}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{f}} \tag{5.4.1}$$

注意：这里的微商必须对固定坐标系进行。由式（5.3.13）知

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{f}}=\boldsymbol{V}+\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} \tag{5.4.2}$$

首先考虑角速度不变的情形（所以 $\dot{\boldsymbol{\omega}}=0$，这一约束在我们所考虑的问题中，实际上是一个并没有很大局限性的限制）。因地球上的测量通常是相对于固定在地球上的坐标系进行，固定在地球上的坐标系就属此种情况。对式（5.4.2）进行微商，考虑到角速度不变（$\dot{\boldsymbol{\omega}}=0$）则有

$$\boldsymbol{F}=m\ddot{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{f}}+m\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{f}}+m\boldsymbol{\omega}\times\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{f}} \tag{5.4.3}$$

式（5.4.3）中的第二项可用式（5.3.8）的算符公式计算，于是

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{f}}=\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{r}}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}=\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}} \tag{5.4.4}$$

上式中的 $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ 是转动坐标系的加速度。式（5.4.3）的最后一项可直接利用式（5.3.8）的算符公式求得

$$\boldsymbol{\omega}\times\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{f}}=\boldsymbol{\omega}\times\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{r}}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) \tag{5.4.5}$$

把式（5.4.3）～（5.4.5）合并起来得

$$\boldsymbol{F}=m\ddot{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{f}}+m\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}+m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})+2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}\qquad(\dot{\boldsymbol{\omega}}=0) \tag{5.4.6}$$

式中，$\ddot{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{f}}$ 是运动坐标系的原点相对于固定坐标系的加速度。

在大多数应用中，x_i 系的原点对惯性坐标系并无加速度，就是说 x_i 系只有转动，或者只有转动再加上一相对于固定系的匀速运动，在这种情形下 $\ddot{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{f}}=0$，于是

$$\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}_{\mathrm{f}}=m\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}+m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})+2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}} \tag{5.4.7}$$

式中，第一项是牛顿方程的通常项。$[-m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})]$ 是所谓的离心力（当 $\boldsymbol{\omega}$ 垂直于位矢 $\boldsymbol{r}$ 时简化为 $m\omega^2 r$）。注意：负号意味着离心力是自转动中心向外指的（见图 5.2）。这一项是由运动坐标系的转动引起的。

式（5.4.7）中的最后一项全然是一个新量，是由质点在转动坐标系中的运动产生的，这一项称为**科里奥利力**。我们看到，科里奥利力确实是由于质点的运

动所产生的，因为这项正比于 v_r，若质点相对转动坐标系没有运动，该力即为零。

5.4.2 达朗贝尔原理

值得指出，我们这里所说的“离心力”和“科里奥利力”并不是通常意义上的“力”。它们是用人为的方法引进的，其目的是使非惯性系中的方程也能够写成类似于牛顿方程的形式。就是说，方程

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}_f \tag{5.4.8}$$

仅在惯性系中成立。如果在转动坐标系中我们也希望写成类似的形式，作用于质点上的有效力为

$$\boldsymbol{F}_{eff} = m\boldsymbol{a}_r \tag{5.4.9}$$

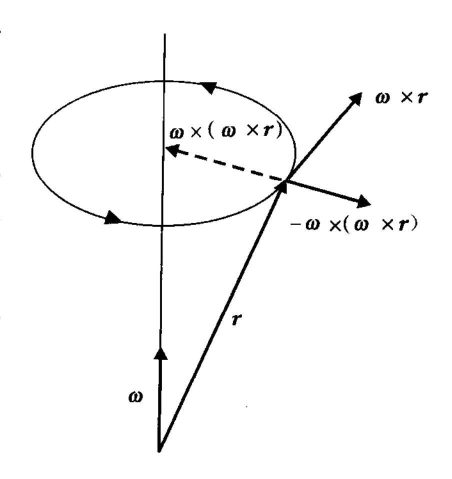


图 5.2 惯性离心力的指向

于是，可以把这样一个方程用真正的力 $m\boldsymbol{a}_f$ 表示为

$$\boldsymbol{F}_{eff} = m\boldsymbol{a}_f + \text{（非惯性项）} \tag{5.4.10}$$

式中的“非惯性项”被认作是“离心力”和“科里奥利力”。例如，如果一个物体绕一固定力心转动，作用于物体上唯一真正的力只有指向力心的引力（从而产生向心加速度）。然而，随转动物体一起运动的观察者，在测出这项向心力的同时，还注意到这个物体并未向力心运动。为使这一结果与作用在物体上的净力为零的要求相符合，观察者必须假设一个附加力——离心力。但这个要求是人为的。为了将这个力和通常意义上的离心力加以区别，称之为**惯性离心力**。它的产生纯粹是人们试图把牛顿方程的形式推广到非惯性系而引进的一个虚构的“修正力”。类似的解释同样适用于科里奥利力。这些“力”是在描述有相对于转动物体的运动时产生的。

要描述一个质点相对于一个物体的运动，而一物体又相对于惯性参照系做转动，这显然是一件复杂的事情。但是，通过引入“非惯性项”这个简单的权宜之计，就可以用类似牛顿方程的运动方程，从而使问题比较容易解释。

式（5.4.10）中的非惯性项的力统称为**惯性力**。在每一时刻，惯性力与施于质点上的力平衡。这个原理称为**达朗贝尔原理**。

5.4.3 科里奥利定理

上面仅讨论了 $\dot{\boldsymbol{\omega}} = 0$ 这种特殊情况。对于一般情况，由 5.3 节的式（5.3.13）知

$$\boldsymbol{v}_f = \boldsymbol{V} + \boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} \tag{5.4.11}$$

直接对上式求微商，得质点的加速度

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{f}}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t}+\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{f}}+\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ (\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\right]_{\mathrm{f}} \tag{5.4.12}$$

其中

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{f}}=\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{r}}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}=\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}} \tag{5.4.13}$$

$$\begin{aligned}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}\right]_{\mathrm{f}}&=\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}\right]_{\mathrm{r}}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\\&=\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathrm{r}}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\\&=\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\end{aligned} \tag{5.4.14}$$

上式中我们以 $\boldsymbol{\beta}$ 表示角加速度，即

$$\boldsymbol{\beta}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \tag{5.4.15}$$

再令

$$\boldsymbol{a}_0=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t} \tag{5.4.16}$$

式（5.4.12）可以写成

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{f}}=\boldsymbol{a}_0+\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})+\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}+2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}} \tag{5.4.17}$$

把上式分为三项之和

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{f}}=\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}+\boldsymbol{a}_{\mathrm{e}}+\boldsymbol{a}_{\mathrm{c}} \tag{5.4.18}$$

其中

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{e}}=\boldsymbol{a}_0+\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) \tag{5.4.19}$$

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{c}}=2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}} \tag{5.4.20}$$

$\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ 是相对加速度，$\boldsymbol{a}_{\mathrm{e}}$ 是牵连加速度，$\boldsymbol{a}_{\mathrm{c}}$ 是科里奥利加速度。其中 $\boldsymbol{a}_{\mathrm{e}}$ 的第一项 $\boldsymbol{a}_0$ 是运动坐标系的平动加速度，即质点的牵连平动加速度；$\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{r}$ 是质点的牵连切向加速度 $\boldsymbol{a}_{\mathrm{e}\tau}$；$\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$ 是牵连法向加速度 $\boldsymbol{a}_{\mathrm{e}n}$。总之，在一般情况下，质点的绝对加速度等于其相对加速度、牵连加速度和科里奥利加速度的矢量和，这就是**科里奥利定理**。

式（5.4.18）乘以质点的质量 m，即可得到惯性系中动力学方程为

$$m\boldsymbol{a}_{\mathrm{f}}=\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}+m\boldsymbol{a}_{\mathrm{e}}+m\boldsymbol{a}_{\mathrm{c}} \tag{5.4.21}$$

若将上式改为如下形式，可得非惯性系（即有加速度运动的参照系）中的运动微分方程

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_{\mathrm{eff}}&=m\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}=m\boldsymbol{a}_{\mathrm{f}}-m\boldsymbol{a}_{\mathrm{e}}-m\boldsymbol{a}_{\mathrm{c}}\\&=\boldsymbol{F}+(-m\boldsymbol{a}_{\mathrm{e}})+(-m\boldsymbol{a}_{\mathrm{c}})\end{aligned} \tag{5.4.22}$$

从式（5.4.22）看出，如果在非惯性系中仍然用牛顿第二定律的观点来解释，那么质点好像受到一个有效力 $\boldsymbol{F}_{\text{eff}}$的作用而产生加速度 $\boldsymbol{a}_{\text{r}}$。有效力由三项组成，第一项 $\boldsymbol{F}$ 是其他物体对质点的作用力，这个力满足牛顿第三定律，有反作用力，故称**真实力**。真实力对任何参照系的观察者来说都是一样的。至于后两项，其情况却大不相同。一方面它们与力具有相同的量纲，如果把它们看成作用在质点上的力，那么它们像真实力一样，将产生相应的加速度；另一方面，它们并不是一种真实物体之间的相互作用力，即不存在作用物体，因而也没有反作用力。从这个意义上说来，如果仍然把它们看成一种力，只不过是一种虚构的“修正力”而已。按惯例，将（$-m\boldsymbol{a}_{\text{e}}$）称为**牵连惯性力**，以 $\boldsymbol{Q}_{\text{e}}$ 标记；而（$-m\boldsymbol{a}_{\text{c}}$）叫**科里奥利惯性力**，简称**科里奥利力**，记作 $\boldsymbol{Q}_{\text{c}}$。于是，质点在非惯性系中的运动微分方程为

$$m\boldsymbol{a}_{\text{r}}=\boldsymbol{F}+\boldsymbol{Q}_{\text{e}}+\boldsymbol{Q}_{\text{c}} \tag{5.4.23}$$

可见，当引进惯性力以后，在非惯性系中解动力学问题所用的方程，在形式上就和惯性系完全一样，所不同的只是在非惯性系中所受的力应换成有效力。

*5.5 相对地球的运动

我们人类生存的地球本身就是一个天体。在众多的天体中，恒星与恒星之间的距离十分遥远，例如一颗典型的恒星离它最近的别的恒星至少有 10^{16}m 远，而且我们现有的仪器实际上很难观测到恒星之间相对运动的加速度。因此，在实际上可以认为恒星之间是彼此孤立的，以相对不动的众多恒星作参考物体建立的坐标系是一个足够应用的惯性系。在这个惯性系中，地球绕太阳的运动（公转）几乎是等速圆周运动，公转的周期约为一年。随着地球绕太阳公转的同时，地球还几乎绕着过南北极的固定方向自西向东自转，其周期约为 24h。所以，地球自转的角速度

$$\omega=\frac{2\pi}{24\times60\times60}=7.29\times10^{-5}\text{s}^{-1} \tag{5.5.1}$$

在地面上或在地面附近运动的物体在以地球质心为坐标原点，并随着地球一起运动的坐标系是一个非惯性系，在这个非惯性系中，根据式（5.4.7），它所满足的方程是

$$m\boldsymbol{a}_{\text{r}}=\boldsymbol{F}+m\boldsymbol{g}_0-m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})-2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_{\text{r}} \tag{5.5.2}$$

方程（5.5.2）中的 $\boldsymbol{\omega}$ 就是式（5.5.1）的地球自转角速度，$\boldsymbol{r}$ 为物体相对地球质心的位矢，$m\boldsymbol{g}_0$ 是地球的万有引力，$\boldsymbol{F}$ 代表地球以外其他物体的作用。上式中的第二项 [$-m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$] 是惯性离心力，它是一个垂直于 $\boldsymbol{\omega}$ 的矢量，指向向外（参见图 5.2），它的量值为 $m\omega^2r\sin\theta$。第三项是科里奥利力。当质点静

止在运动坐标系内时（$\boldsymbol{v}_r=0$），惯性离心力是有效力中唯一的附加项；当质点运动时，称为科里奥利力的那一项也将起作用。

如果取 ω 为式（5.5.1）的值，r 等于地球的半径，即 $r=6.4\times10^6\mathrm{m}$，即刻可得最大的向心加速度为

$$\omega^2 r=3.38\times10^{-2}\mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

它约为重力加速度的 0.3%。这一加速度虽小，对物体的重力还是有一定的影响。实际测得的重力（有时称为表观重力）$m\boldsymbol{g}$ 的作用代表了地球质量分布的引力场和向心加速度效应（惯性离心力作用）二者的综合作用。人们已经习惯把二者之和说成地球的**重力场**，以区别于地球的**引力场**。重力是引力和惯性离心力的矢量和（见图 5.3）

$$m\boldsymbol{g}=m\boldsymbol{g}_0-m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) \tag{5.5.3}$$

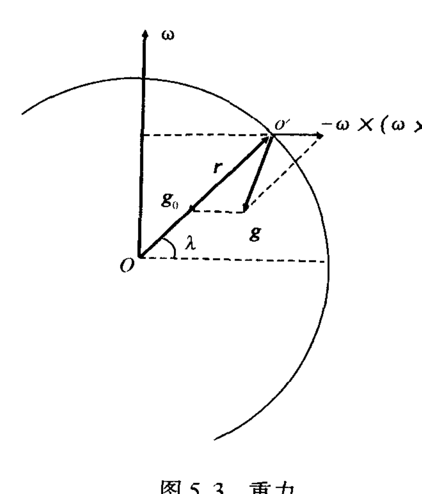


图 5.3 重力

自然重力将随纬度变化，赤道上最小，而极地最大。重力方向与引力方向也不一致。引力作用线通过地心，而重力作用线一般并不通过地心（两极除外）[①]。

地球绕太阳公转的角频率是自转角频率的1/365，或者说地球公转的角频率是自转角频率的 2.7×10^{-3} 倍。另一方面，r 则要大上一个绕太阳运动的轨道半径与地球半径的比值 0.25×10^5。因此，由地球公转引起的离心力与其自转引起的离心力之比近似地为

$$0.25\times10^5\times(2.7\times10^{-3})^2\approx0.2$$

这个数值说明，太阳公转引力的离心力不足以对地面附近物体的运动有重要影响，因而可以略去，含有 ω^2 项的地球自转引起的惯性离心力亦略去，也就是说粗略地认为重力通过地心，则由式（5.5.2）得

$$m\boldsymbol{a}_r=\boldsymbol{F}-mg\boldsymbol{e}_z-2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r \tag{5.5.4}$$

式中，g 为重力加速度。在动力学方程（5.5.4）中，$\boldsymbol{F}$ 是其他物体的作用力，与地球自转无关；$m\boldsymbol{g}=-mg\boldsymbol{e}_z$ 是常力场，如果考虑高阶项，也只不过在原来局部引力场上加上一点不随物体运动变化的微小修正量。由于地球自转而使物体表

---

① 由于地球引力场的强度 $\boldsymbol{g}_0$ 和重力场的强度 $\boldsymbol{g}$ 相差甚微（详细计算可知二者量值上相差不大于 g_0 的千分之三到千分之四），所以通常不区分 $\boldsymbol{g}$ 和 $\boldsymbol{g}_0$ 的差别，而将它们统记为 $\boldsymbol{g}$，称为重力加速度。自然万有引力 $m\boldsymbol{g}_0$ 和重力 $m\boldsymbol{g}$ 亦相差甚微，从而忽略它们二者的差别，并在很多场合混用万有引力和重力这两个名称。

现的非惯性效应主要是科里奥利力。图 5.4 中的圆球代表地球，一质点在北半球某点 O' 上以速度 $\boldsymbol{v}_\mathrm{r}$ 相对于地球运动，该点的纬度为 λ。图中 SN 是地轴，地球自转速度 $\boldsymbol{\omega}$ 就沿着该轴。取 O' 为原点，单位矢量 $\boldsymbol{e}_z$ 铅垂向上，$\boldsymbol{e}_x$ 水平向南，$\boldsymbol{e}_y$ 水平向东，通常称之为**地表坐标系**。由于 $\boldsymbol{\omega}$ 与 $\boldsymbol{e}_x$，$\boldsymbol{e}_z$ 共面，故得

$$\left.\begin{aligned} \omega_x &= -\omega\cos\lambda \\ \omega_y &= 0 \\ \omega_z &= \omega\sin\lambda \end{aligned}\right\} \tag{5.5.5}$$

于是

$$\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_\mathrm{r} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ -\omega\cos\lambda & 0 & \omega\sin\lambda \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix}$$

$$= -\omega\dot{y}\sin\lambda\boldsymbol{e}_x + (\omega\dot{z}\cos\lambda + \omega\dot{x}\sin\lambda)\boldsymbol{e}_y - \omega\dot{y}\cos\lambda\boldsymbol{e}_z \tag{5.5.6}$$

将式（5.5.6）代入式（5.5.4），便可写出其投影方程

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x + 2m\omega\dot{y}\sin\lambda \\ m\ddot{y} &= F_y - 2m\omega(\dot{x}\sin\lambda + \dot{z}\cos\lambda) \\ m\ddot{z} &= F_z - mg + 2m\omega\dot{y}\cos\lambda \end{aligned}\right\} \tag{5.5.7}$$

利用方程（5.5.4），或者它的投影方程（5.5.7），我们可以定性地或定量地研究由于地球自转产生的影响。我们首先定性地解释三个现象，然后定量地计算一个现象。

1. 相对于地面的平衡

若物体相对于地面静止不动，则相对速度 $\boldsymbol{v}_\mathrm{r}$ 和相对加速度 $\boldsymbol{a}_\mathrm{r}$ 都等于零。于是，动力学方程（5.5.4）就变成下面的平衡方程

$$\boldsymbol{F} + m\boldsymbol{g} = 0 \tag{5.5.8}$$

这个方程说明，为了保持物体相对于地面平衡，必须施加一个与该物体的重力大小相等且方向相反的作用力 $\boldsymbol{F}$。我们知道，这个作用力的反作用力是相对于地面平衡的物体对支持它平衡的其他物体的作用力，且与 $m\boldsymbol{g}$ 相等。由于这个原因，通常又把在地面上平衡的物体对支持它平衡的其他物体的作用力称为**重力**。人们通常用台秤或弹簧秤测得物体的**重量**，就是重力的大小（严格地说，并不是地球对物体的万有引力的大小）。在许多场合，重力的概念又被进一步推广，把重力场中相对任一参考系（例如人造地球卫星内部）相对平衡的物体对支持物的作用力也称为重力。在此情况下，重力的大小和方向须由观察者所在的参考系确定。在人造地球卫星内，物体浮在空中静止不动，其重力就认为等于零，这就是通常所说的**失重**。

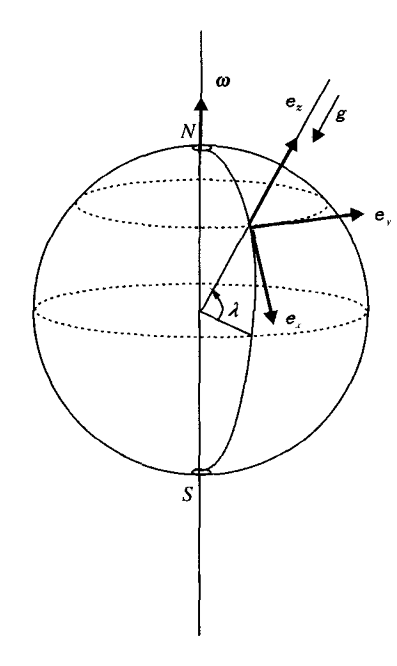


图 5.4　地球自转的影响

当一个物体被悬挂在地面上某处而处于平衡时，悬线的方向沿着重力作用线（而不是万有引力的作用线），这个方向称为物体所在处的竖直方向（或铅直方向），沿着这方向的直线称为铅垂线。所以，铅垂线一般不是通过地球中心的。与铅垂线垂直的平面称为地面上该物体所在处的水平面。根据方程（5.5.8）可知，置于光滑水平面上的物体可以相对地面保持平衡。根据流体力学可知，静止液体的自由表面与外力场垂直，因此，海平面应与重力方向垂直，因而是水平面。由此可以推论，从总体上来说，实际上地球不应该是正圆形的，而应是从两极向地心稍有压扁的旋转椭圆球，而且这个形状应该使它表面上每一点处的切平面成为上面所定义的水平面。地球的实际形状大体上正符合这个要求。

2. 轨道的磨损和河岸的冲刷

代表地球自转的角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 是指向北方的。所以在北半球，$\boldsymbol{\omega}$ 有一分量 ω_z，沿着本地的铅垂线朝外指。如果一质点以速度 $\boldsymbol{v}_r$ 在水平面内（在地球表面的地表坐标系中）抛射，则科里奥利力 $-2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r$ 将在水平面内有一大小为 $2m\omega_z v_r$ 的分量，其方向将指向质点运动的右侧（见图 5.5）因而与原来的运动方向发生偏离。

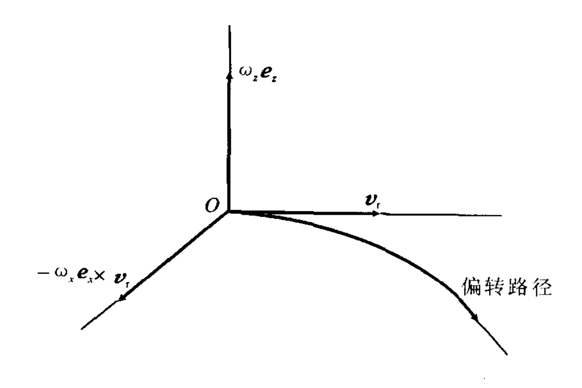


图 5.5　北半球的科里奥利偏转方向

由于科里奥利力水平分量的数值正比于 $\boldsymbol{\omega}$ 的垂直分量，科里奥利力中能产生偏移的有效部分与纬度有关，在北极为极大值，而在赤道为零。这种科里奥利偏转长年累月的作用使得北半球河流右岸的冲刷甚于左岸，因而比较陡峭，双轨单行铁路的情形也是这样。由于右轨所受到的压力大于左轨，因而磨损较甚。

在南半球，分量 ω_z 是沿本地铅垂线朝内指，因而所有的偏移均与在北半球反向，所以，南半球河流左岸冲刷较甚，而双轨单行铁路的左轨磨损较甚。

3. 因地球自转引起的气流

科里奥利力在气象学和海洋学的许多现象中起着极为重要的作用，这类现象涉及长距离上的质量迁移，比如像环流型信风和洋流走向都属这类现象。远程火箭运动中，科里奥利力的作用也十分明显。这些现象的充分描述要求解复杂的流体动力学问题，在这些问题中，科里奥利力仅仅是所包含的许多项中的一项。然而仍有可能看出科里奥利力贡献的某些表现。

在地球上，热带部分的空气因热上升，并在高空向两极推进；两极附近的空气，则因冷而下降，并在地面附近向赤道推进，形成对流而成风，称为**信风**。由于彼此交易，亦称**贸易风**。由于地球自转而使气团处于一转动系中，科里奥利力的作用，将使气团向右偏转（这是指在北半球，在南半球则向左偏转），旋流方向是逆时计（见图5.6），形成东北信风。在南半球则形成东南信风。大气上层的反信风，在北半球为西南信风，在南半球则为西北信风。

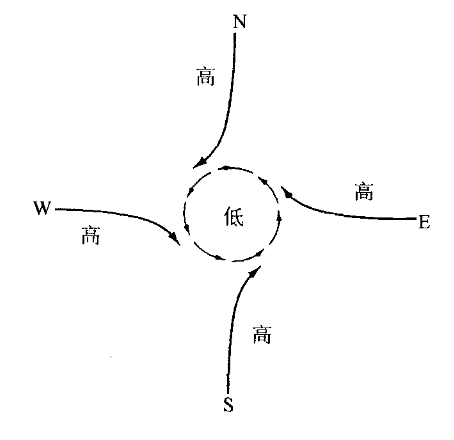


图5.6 信风的形成

4. 落体的偏离

现在让我们来定量计算在地球重力场中自由下落的一个质点由于科里奥利力而产生的水平偏离。

我们近似假定，下落距离足够小，所以 g 在运动过程中保持不变。

我们接着式（5.5.6）继续讨论，虽然科里奥利力将在 $\boldsymbol{e}_y$ 和 $\boldsymbol{e}_x$ 方向产生小的速度分量，但是和垂直速度 $\dot{z}$ 相比，我们无疑可以忽略 $\dot{x}$ 和 $\dot{y}$。于是近似地可把速度各分量写成

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&\approx 0\\ \dot{y}&\approx 0\\ \dot{z}&\approx -gt\end{aligned}\right\}\qquad(5.5.9)$$

式中，我们假设质点是从静止开始下落而得到的 $\dot{z}$。由于是自由下落，来自其他

物体的作用力 $\boldsymbol{F}=(F_x,F_y,F_z)=0$。于是由式（5.5.7）可得

$$\left.\begin{array}{l}\ddot{x}\approx 0\\ \ddot{y}\approx 2\omega g t\cos\lambda\\ \ddot{z}\approx -g\end{array}\right\}\tag{5.5.10}$$

因此，科里奥利力的效应是在 $\boldsymbol{e}_y$ 的方向（亦即向东的方向）产生了一加速度。对 $\ddot{y}$ 积分两次得

$$y(t)\approx\frac{1}{3}\omega g t^3\cos\lambda\tag{5.5.11}$$

在积分的过程中用了 $t=0$ 时，$y=0$ 和 $\dot{y}=0$ 的条件。积分 $\ddot{z}$ 得出下落距离的熟知结果

$$z(t)\approx z(0)-\frac{1}{2}gt^2\tag{5.5.12}$$

所以自高度 $h=z$（0）处下落到地面 $[z(t)=0]$ 时间为

$$t\approx\sqrt{\frac{2h}{g}}\tag{5.5.13}$$

因此，一质点在北纬 λ 度处自高度 h 静止下落的东向偏离结果为

$$d\approx\frac{1}{3}\sqrt{\frac{8h^3}{g}}\omega\cos\lambda\tag{5.5.14}$$

可见 h 越大，则偏离越大。在北京地区 $\lambda=40°$，当 $h=100\text{m}$ 时，可算得偏离为 $d\approx 1.67\times10^{-2}\text{m}$（忽略空气阻力效应），而在 $h=200\text{m}$ 时，$d\approx 4.75\times10^{-2}\text{m}$。这个数值很小，故难于察觉。从式（5.5.14）可以看出，在赤道处（$\lambda=0$）偏东的数值最为显著；而在两极（$\lambda=\frac{\pi}{2}$）则为零。

实际上去完成这一实验是困难的，因为小的偏离往往可能被气流、黏滞性或其他各种干扰所掩盖。比较容易观察的是著名的傅科摆实验，将在 5.6 节讨论。

进一步分析，若做出二级近似计算，即保留到 ω^2 项，可以证明，落体不但偏东，而且还有向南的偏离（在北半球）

$$d_s\approx\frac{3}{2}\frac{h^2\omega^2}{g}\sin\lambda\cos\lambda\tag{5.5.15}$$

但实际上太阳、月亮等的引力影响也会达到同一数量级，因此这一补充已没有什么实际意义。

科里奥利效应在原子物理学中也存在。例如，在多原子分子中可能同时出现两种形式的运动，一种是作为刚体整体的分子的转动；另一种是原子相对于它们平衡位置的振动。由于振动，原子将相对于转动的分子坐标系运动，因此科里奥利项不等于零，它使原子在垂直于原来振动的方向上运动。分子光谱中观察到科里奥利力引起的扰动就体现了分子的转动跟振动能级之间的相互作用。

*5.6 傅 科 摆

5.5 节我们曾比较仔细地讨论了落体偏东问题，最后还估算了偏离的数量级。由于偏离甚微，常为其他干扰所掩盖，比较容易观察的是傅科摆实验。这一节我们就来讨论这个问题。

首先考虑一种极端情况。如果在北极让一个摆在空间的一个给定平面内摆动，则它垂直于该平面的线动量为零，当地球在它下面转动时，它将继续在这个不变的平面内摆动。在地球上观察者看来，振动平面每天转过一周，科里奥利力对单摆运动的效应是产生一进动，也就是说振动平面随时间而转动。由于我们把这个实验设想在北极，结果简单而清楚；但若在其他纬度，情况就会复杂得多。

为了描述科里奥利力对单摆运动产生的效应，首先让我们选取一组坐标轴，令原点位于摆的平衡点，z 轴沿本地铅垂方向，向上为正，由于我们关心的是振动平面的转动，亦即摆在 xy 平面（水平面）的运动，所以我们将摆的运动限制为微幅振动，与摆长相比水平偏移是很小的。

对于傅科摆来讲，重力以外的作用力就是悬线的张力 $\boldsymbol{T}$（见图 5.7）。根据式（5.5.4），运动方程为

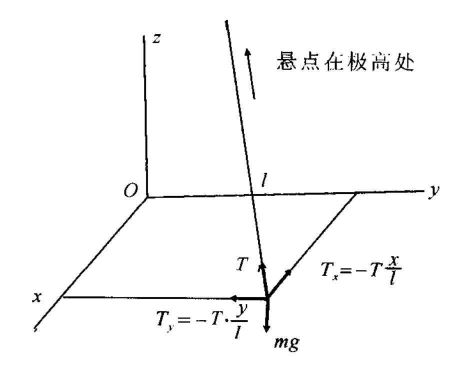


图 5.7　傅科摆

$$m\boldsymbol{a}_r = m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{T} - 2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r \tag{5.6.1}$$

如悬线长为 l，摆锤在某一瞬时的坐标为 x，y，z，则

$$T_x = -\frac{x}{l}T, \qquad T_y = -\frac{y}{l}T, \qquad T_z = \frac{l-z}{l}T \tag{5.6.2}$$

因为

$$l - z = \sqrt{l^2 - (x^2 + y^2)} = l(1 - \frac{x^2 + y^2}{2l^2} + \cdots) \approx l$$

所以

$$T_z \approx T$$

这样，式（5.6.2）可以重新写成

$$T_z = -\frac{x}{l}T, \qquad T_y = -\frac{y}{l}T, \qquad T_z = T \tag{5.6.3}$$

g 和 $\boldsymbol{\omega}$ 的分量表达式为

$$g_x = 0, \qquad g_y = 0, \qquad g_z = -g \tag{5.6.4}$$

和

$$\omega_x = -\omega\cos\lambda, \qquad \omega_y = 0, \qquad \omega_z = \omega\sin\lambda \tag{5.6.5}$$

由于我们限制为微幅振动，与摆长相比水平偏移是很小的。在这样的条件下，和 $\dot{x}$，$\dot{y}$ 相比，$\dot{z}$ 是很小的，可以忽略

$$(\boldsymbol{v}_r)_x = \dot{x}, \qquad (\boldsymbol{v}_r)_y = \dot{y}, \qquad (\boldsymbol{v}_r)_z = \dot{z} \approx 0 \tag{5.6.6}$$

因此

$$\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_r \approx \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ -\omega\cos\lambda & 0 & \omega\sin\lambda \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \end{vmatrix} \tag{5.6.7}$$

写出 $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_r$ 的分量

$$\left.\begin{aligned} (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_r)_x &\approx -\dot{y}\omega\sin\lambda \\ (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_r)_y &\approx \dot{x}\omega\sin\lambda \\ (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_r)_z &\approx -\dot{y}\omega\cos\lambda \end{aligned}\right\} \tag{5.6.8}$$

将式（5.6.3）、（5.6.4）和（5.6.8）代入方程（5.6.1），略去包含 ω^2 的项，得到有关的方程为

$$\left.\begin{aligned} (\boldsymbol{a}_r)_x &= \ddot{x} \approx -\frac{T}{m} \cdot \frac{x}{l} + 2\dot{y}\omega\sin\lambda \\ (\boldsymbol{a}_r)_y &= \ddot{y} = -\frac{T}{m} \cdot \frac{y}{l} - 2\dot{x}\omega\sin\lambda \end{aligned}\right\} \tag{5.6.9}$$

对小的位移，$T \approx mg$，令 $\alpha^2 = T/ml \approx g/l$，并由式（5.6.5）的第三式知 $\omega\sin\lambda = \omega_z$，则有

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} + \alpha^2 x &\approx 2\omega_z \dot{y} \\ \ddot{y} + \alpha^2 y &\approx -2\omega_z \dot{x} \end{aligned}\right\} \tag{5.6.10}$$

我们注意到，$\ddot{x}$ 的方程中包含有 $\dot{y}$ 的项，而 $\ddot{y}$ 的方程中包含有 $\dot{x}$ 的项，这种方程称作**耦合方程**。为求这样一对耦合方程的解，可用方程（5.6.10）的第一式

加上第二式乘以 i（$i=\sqrt{-1}$）得

$$(\ddot{x}+i\ddot{y})+\alpha^2(x+iy)\approx-2\omega_z(i\dot{x}-\dot{y})$$
$$\approx-2i\omega_z(\dot{x}+i\dot{y}) \tag{5.6.11}$$

如果令

$$\zeta\equiv x+iy \tag{5.6.12}$$

则得复变数方程

$$\ddot{\zeta}+2i\omega_z\dot{\zeta}+\alpha^2\zeta\approx0 \tag{5.6.13}$$

这个方程的通解可写为

$$\zeta\approx Ae^{n_1t}+Be^{n_2t} \tag{5.6.14}$$

式中，A，B 是两个积分常数，都是复数，其值可由初始条件确定。n_1 和 n_2 则为方程

$$n^2+2in\omega_z+\alpha^2=0 \tag{5.6.15}$$

的根，其值为

$$\left.\begin{aligned}n_1&=-i\omega_z+i\sqrt{\omega_z^2+\alpha^2}\\ n_2&=-i\omega_z-i\sqrt{\omega_z^2+\alpha^2}\end{aligned}\right\} \tag{5.6.16}$$

如果地球没有转动，则 $\omega=0$，自然 $\omega_z=0$，于是关于 ζ 的方程将变为

$$\ddot{\zeta}'+\alpha^2\zeta'\approx0,\qquad \omega_z=0 \tag{5.6.17}$$

由此可见，α 相当于摆的振动频率。显然这个频率远大于地球转动的角速度，所以 $\alpha\gg\omega_z$，则式（5.6.16）可写为

$$\begin{aligned}n_1&=-i\omega_z+i\alpha\\ n_2&=-i\omega_z-i\alpha\end{aligned} \tag{5.6.18}$$

将式（5.6.18）代入式（5.6.14）得

$$\zeta(t)\approx e^{-i\omega_zt}(Ae^{i\alpha t}+Be^{-i\alpha t}) \tag{5.6.19}$$

如果注意到关于 ζ' 的方程具有如下解答

$$\zeta'(t)=x'(t)+iy'(t)=Ae^{i\alpha t}+Be^{-i\alpha t} \tag{5.6.20}$$

这样我们就可把式（5.6.19）写成

$$\zeta(t)=\zeta'(t)e^{-i\omega_zt} \tag{5.6.21}$$

或者

$$\begin{aligned}x(t)+iy(t)&=[x'(t)+iy'(t)]\cdot e^{-i\omega_zt}\\ &=(x'+iy')(\cos\omega_zt-i\sin\omega_zt)\\ &=(x'+\cos\omega_zt+y'\sin\omega_zt)+i(-x'\sin\omega_zt+y'\cos\omega_zt)\end{aligned} \tag{5.6.22}$$

由等式两端实部和虚部分别相等得

$$\left.\begin{aligned}x(t) &= x'\cos\omega_z t + y'\sin\omega_z t\\ y(t) &= -x'\sin\omega_z t + y'\cos\omega_z t\end{aligned}\right\} \tag{5.6.23}$$

我们可把方程（5.6.23）写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix}x(t)\\ y(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\omega_z t & \sin\omega_z t\\ -\sin\omega_z t & \cos\omega_z t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'(t)\\ y'(t)\end{bmatrix} \tag{5.6.24}$$

显然（x，y）可以从（x'，y'）应用熟悉的旋转矩阵

$$\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix} \tag{5.6.25}$$

求得。因此，旋转角为 $\theta=\omega_z t$，摆的振动平面以频率 $\omega_z=\omega\sin\lambda$ 转动。

总之，我们可以看出，摆此时在做两种周期的运动。一种周期为

$$T=\frac{2\pi}{\alpha}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{5.6.26}$$

和通常的单摆相同，其轨迹一般是椭圆，也可能是直线；另一种周期为

$$T'=\frac{2\pi}{\omega_z}=\frac{2\pi}{\omega\sin\lambda} \tag{5.6.27}$$

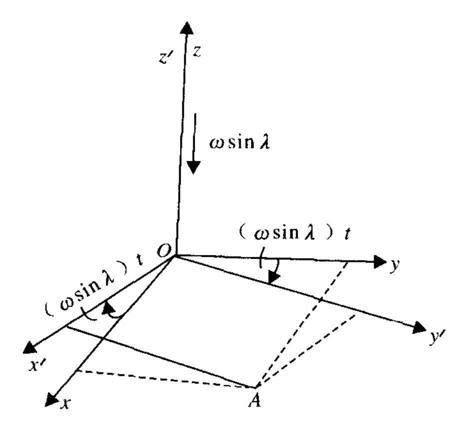


图 5.8 摆振动平面的旋转

当 $\sin\lambda>0$（北半球），我们看到摆的振动面以角速度 $\omega\sin\lambda$ 做顺时针旋转（见图 5.8）。在 $\omega_z=\omega\sin\lambda$ 这个式中 $\lambda>0$ 表示北半球的纬度角，$\lambda<0$ 表示南半球的纬度角。ω_z 与 ω 的这种关系表明，在地面上看到单摆平面的旋转完全起因于地球自转角速度。我们还可以看到，在地球的两极，$\sin\lambda=\pm1$，摆的振动平面相对于地面每天旋转一周，旋转的方向是自东向西。在南北半球的其他地方，$|\sin\lambda|<1$，所以，$\omega_z<\omega$，说明摆的振动平面的旋转周期比一天长，而且越接近赤道，这个周期越长。

因为 ω 很小，所以 $T'\gg T$。因此在短时间内就很难觉察到振动面在旋转。为了观察这种现象，则摆锤应重，悬线应长，以使振动能够维持长久。傅科曾首先设计这样一个摆来验证地球自转。他于 1851 年在巴黎一个教堂里装置了这样一个巨摆，摆长 67m，差不多有二十层楼高，摆锤重 28kg，摆的振动周为 16s。他观测到摆平面的旋转周期 T' 约为 32 小时。这个数据与我们前面所做的理论分析相当吻合。巴黎的纬度是北纬 49°，将 $2\pi/\omega=24\text{h}$ 和 $\lambda=49°$ 代入式（5.6.27），立即得到

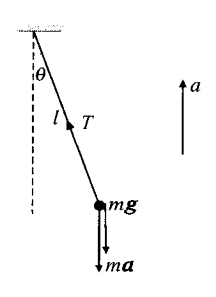
$$T' = 24 \times \frac{1}{\sin 49^\circ} \approx 32\text{h}$$

摆锤平面的转动，便证明了地球的自转。它在物理学史上留下了光辉的一页。

习　题

5.1　一升降机向上以匀加速度 a 上升，试求在此升降机中单摆的周期。

［答］　$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{1}{g+a}}$



题 5.1 图

5.2　有一单摆连在一长为 l 的轻杆上，悬挂点在铅直平面以 ω 的匀角速度做圆周运动，圆半径为 a，并且在 $t=0$ 时它处于最低点，设以 θ 表示摆杆与铅垂线所夹之角，试证其运动方程为

$$\ddot{\theta} + \frac{a}{l}\omega^2 \sin(\theta - \omega t) + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

5.3　在一光滑水平直管中有一质量为 m 的球，此管以等角速度 ω 绕通过其一端的铅直轴转动。在起始时，球距转动轴的距离为 a，球相对于管的速度为零。求球沿管的相对运动规律及管的水平反作用力 N。

［答］　$x = a\,\text{ch}(\omega t)$，　　$N = 2am\omega^2 \text{sh}(\omega t)$

5.4　直杆 OA 在光滑水平面上以等角速度 ω 绕其固定端点 O 转动时，推动一个在此平面上的小球，其质量为 m，如球与杆的摩擦因数为 μ，求球沿杆的相对运动规律。开始时，球距 O 点的距离为 a，球相对于杆的速度为零。

［答］　$$x = \frac{a}{2\sqrt{\mu^2+1}}\left[(\sqrt{\mu^2+1}+\mu)\,e^{\omega(\sqrt{\mu^2+1}-\mu)t} + (\sqrt{\mu^2+1}-\mu)\,e^{-\omega(\sqrt{\mu^2+1}+\mu)t}\right]$$

5.5　质量为 m 的质点能在 xoz 平面内不受摩擦而自由运动；xoz 平面又绕固定铅垂轴 oz 以等角速度 ω 转动，如果此质点仅受重力作用，而且起始坐标为 $(x_0, 0, z_0)$，起始相对速度为零，求其相对运动。又求转动平面的反作用力 N。

［答］　质点 m 在 xoz 平面内的相对运动的方程为

$$z = z_0 - \frac{1}{2}gt^2$$

$$x = \frac{x_0}{2}\ (e^{\omega t} + e^{-\omega t})$$

平面的反作用力 N 的大小等于科里奥利力，方向与科里奥利力相反，所以

$$N = 2m\omega\dot{x} = mx_0\omega^2\ (e^{\omega t} - e^{-\omega t})$$

5.6　自北纬度为 λ 的地方，以仰角 α 自地面向东方发射一炮弹，炮弹的腔口速度为 V。计及地球自转，试证此炮弹落地时的横向偏离为

$$d = \frac{4V^2}{g^2}\omega\sin\lambda\sin^2\alpha\cos\alpha$$

式中，ω 为地球自转的角速度。计算时可忽略 ω^2 项。

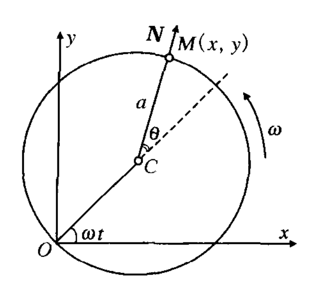
5.7　一质点如以初速度 v_0 在纬度为 λ 的地方竖直向上射出，达到 h 高后，复落地面，假定空气阻力可以忽略不计，试求落至地面时的偏差。

［答］　$\frac{4}{3}\sqrt{\frac{8h^2}{g}}\omega\cos\lambda$（偏西）

5.8　质量为 m 的小环 M，套在半径为 a 的光滑圆圈上，并可沿着圆圈滑动。如圆圈在水平面内以角速度 ω 绕圈上某点转动，试证 θ 满足方程

$$\ddot{\theta} + \omega^2\sin\theta = 0$$

式中，θ 为 M 与圆心 C 的连线和通过 O 点的直径间的夹角。



题 5.8 图

第六章　刚 体 力 学

6.1　刚体的独立坐标

刚体定义为其间距离保持不变的质点所构成的系统。这个概念虽然有点理想化，但却十分有用。诚然，实际存在于自然界的系统，只可能近似地符合这个条件。在一般情况下，大多数固体形状和大小的改变非常小，以至于把固体当成一个整体来研究其运动规律时，完全可以不去注意这些改变。

为简化推导，我们经常把刚体视为离散质点的集合。这种看法和把刚体看成连续体，完全不去注意它们的内部构造的情况并不矛盾。实际上，这两种理想化概念可以交替使用。唯一的不同在于把对诸质点的求和换为对质量密度分布的积分。而运动方程对这两种观点都是同样成立的。

欲讨论刚体的运动，首先必须明确需要多少个独立坐标来确定刚体的位形。一个具有 N 个质点的刚体最多能有 $3N$ 个自由度。但刚体所受的约束将使这一数目大为减少，若以 $r_{\alpha\beta}$表示刚体中第 α 个质点和第 β 个质点的距离，这些约束可表示为下列形式的方程

$$r_{\alpha\beta} = c_{\alpha\beta} \qquad (\alpha, \beta = 1,2,3,\cdots,N) \tag{6.1.1}$$

其中，$c_{\alpha\beta}$为常数。实际自由度的数目不能简单地从 $3N$ 中减去约束方程的数目得到，因为像方程（6.1.1）形式的可能方程共有 $N(N-1)/2$ 个。当 N 为大数时，这些方程的数目远比 $3N$ 多。事实上，方程（6.1.1）并非完全独立的。为了确定刚体中某一个点的位置，并不需要确定它与刚体中所有其他点的距离，而只需要指明它与三个非共线点之间的距离就可以了（见图 6.1）。因此，刚体中只要有三个质点的位置一旦被确定，那些约束就会把其余质点的位置都固定下来。所以，刚体的自由度数不会超过九个。而且三个参考点本身也不是独立的，还有三个刚性约束方程

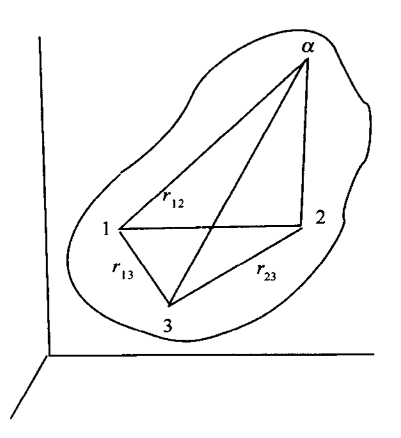


图 6.1　根据某点与三个参考点的距离来确定该点在刚体中的位置示意图

$$r_{12}=c_{12}, \qquad r_{23}=c_{23}, \qquad r_{31}=c_{31}$$

这些方程把自由度的数目减少为6个。因此，空间中刚体的位形只需要6个独立的广义坐标来确定，而不论它可能包含多少个质点——即使在连续体的极限情形下也不例外。

除刚性约束之外，还可能有其他一些约束加在物体上。例如，物体可能被约束在某个表面上运动，或者有两个点固定，或者一个点固定等等，在这些情况下，附加的约束将会进一步减少自由度的数目。刚体运动方式可分下述五种类型：

1）平动　刚体运动时，如果在任何时刻刚体中任意二条直线始终彼此平行，那么这种运动称为**平动**。此时刚体中所有质点都有相同的速度和加速度，任何一个质点的运动都可以代表全体，与质点的运动没有区别。质点的概念（1.1节）正是从平动中抽象出来的。对于这种情形，只要研究质心的运动就可以了。因此，刚体做平动运动时，有三个独立坐标。

2）定轴转动　如果刚体运动时，其中有两个质点始终不动，因两点可决定一条直线，所以这条直线上的各点都固定不动，整个刚体绕着这条直线转动，这条直线叫转动轴，这种运动叫做**绕固定轴转动**，简称**定轴转动**。此种情况只要知道刚体绕这条轴转了多少角度，就能确定刚体的位置。因此，刚体做定轴转动时只有一个独立坐标。

3）平面平行运动　刚体运动时，刚体中任意一点如果始终在平行于某一固定平面的平面内，则叫**平面平行运动**。这时运动可分解为某一平面内任意一点的平动（两个独立坐标）及绕通过此点且垂直于固定平面的固定轴的转动（一个独立坐标），所以刚体做平面平行运动时只有三个独立坐标。

4）定点转动　如果刚体运动时，只有一点固定不动，整个刚体围绕着通过这点的某一瞬时轴线转动，则叫**定点转动**。此时转动轴并不固定于空间（因只通过一个定点），与定轴转动时的情形不同，需要用两个独立坐标才能确定这条轴线在空间的取向，再用一个坐标确定刚体绕这轴线转了多少角度，所以刚体做定点转动时有三个独立坐标。

5）一般运动　刚体不受任何约束，可以在空点任意运动，但可分解为质心的平动（三个独立坐标）与绕通过质心的某直线的定点转动（三个独立坐标）。因此，刚体做一般运动时有六个独立坐标。

*6.2　刚体运动的欧拉定理

要研究刚体运动，自然首先要选择坐标系，类似于5.3节的做法，需要两套坐标系，其中一套是惯性坐标系，在讨论刚体运动时，遵照习惯，称其为**空间坐**

标系，我们以 x'_i 表示；另一套坐标系，固定在刚体上并参与刚体的全部运动，称为**本体坐标系**，以 x_i 表示。

物体在任何时刻的取向可用一个正交变换来确定。随着时间的推移，取向也将会随之而改变。因此变换矩阵将是时间的函数，我们把它记作 $\boldsymbol{\lambda}(t)$。如果所选择的本体坐标系在 $t=0$ 时刻与空间坐标轴重合，则最初的变换是简单的恒等变换

$$\boldsymbol{\lambda}(0) = \boldsymbol{I} \tag{6.2.1}$$

在以后的时间里，$\boldsymbol{\lambda}(t)$ 一般是不同于恒等变换的。但由于实际运动必须是连续的，$\boldsymbol{\lambda}(t)$ 也必然是时间的连续函数。因而可以说，变换是从恒等变换开始连续地演化发展的。

刚体运动的**欧拉定理**具有基础性的意义，这个定理用数学语言描述就是：**具有一固定点的刚体的任一位移，可由绕通过此点的某一轴线的转动得到**。刚体的定点运动也称为**定点转动**。

我们先来分析一下如何证明这个定理。如果取本体坐标系的原点为固定点，则刚体的位移不包含本体坐标系的平移，而只包含取向的变化。于是，根据欧拉定理可知，由初始时刻的本体坐标轴（取与空间坐标系重合）做单纯转动就能得到任何时刻 t 的本体坐标轴。换句话说，用矩阵 $\boldsymbol{\lambda}$ 来描述具有一个固定点的刚体实际运动的运算为转动。我们知道，转动有一个特征，就是它的方向，比如说，转轴的方向是不受运算影响的。因此，沿转动轴的任何矢量，在初始轴和最终轴上的分量必定相同。关于转动的另一个必要条件是，矢量的量值不受影响。这一条件由正交条件自动得到满足。所以，如果能够证明某个矢量 $\boldsymbol{R}$ 在两个坐标系中具有相同的分量，也就证明了欧拉定理。对矢量若用矩阵表示，上述说法就可以写成

$$\boldsymbol{R}' = \boldsymbol{\lambda R} = \boldsymbol{R} \tag{6.2.2}$$

方程（6.2.2）实际上是更为一般的方程

$$\boldsymbol{R}' = \boldsymbol{\lambda R} = \eta \boldsymbol{R} \tag{6.2.3}$$

的一种特殊情况，式中 η 是一个可能是复数的常数。那些使得方程（6.2.3）可解的 η 值称为矩阵 $\boldsymbol{\lambda}$ 的**本征值**（或特征值）。方程（6.2.3）叫**本征值方程**。那些矢量解则相应地称为 $\boldsymbol{\lambda}$ 的**本征矢**。探求满足方程（6.2.3）的矢量的问题也就叫求解给定矩阵的本征值问题。于是刚体运动的欧拉定理可以重述如下：**确定具有一固定点的刚体实际运动的实正交矩阵的本征值为 ±1**。

本征方程（6.2.3）可以写成

$$(\boldsymbol{\lambda} - \eta \boldsymbol{I})\boldsymbol{R} = 0 \tag{6.2.4}$$

或者把它展开成

$$\left.\begin{aligned}(\lambda_{11}-\eta)x+\lambda_{12}y+\lambda_{13}z&=0\\ \lambda_{21}x+(\lambda_{22}-\eta)y+\lambda_{23}z&=0\\ \lambda_{31}x+\lambda_{32}y+(\lambda_{33}-\eta)z&=0\end{aligned}\right\}\tag{6.2.5}$$

式（6.2.5）是包含有本征矢 $\boldsymbol{R}$ 的 x，y，z 分量的一组齐次联立方程。但是，这些方程并不能提供三个分量的确定值，只能给出各分量的比值。这实际上相当于只能确定本征矢的方向，而其量值依然无法确定的情况。由于本征矢与常数的乘积仍是一个本征矢，方程（6.2.5）在任何情况下都是齐次方程，根据微分方程理论，如果要有解，系数行列式必须为零

$$|\boldsymbol{\lambda}-\eta I|=\begin{vmatrix}\lambda_{11}-\eta & \lambda_{12} & \lambda_{13}\\ \lambda_{21} & \lambda_{22}-\eta & \lambda_{23}\\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33}-\eta\end{vmatrix}=0\tag{6.2.6}$$

方程（6.2.5）称为矩阵的**特征方程**或**久期方程**（secular equation）。满足方程（6.2.6）的那些 η 值就是所要求的本征值。所以，刚体运动的欧拉定理又可归纳成下述说法：对于所考虑的实正交矩阵，久期方程必定有一个 $\eta=+1$ 的根。

久期方程一般有三个根，因而有三个相应的本征矢。为了方便，常用 x_1，x_2，x_3 代替 x，y，z。用这种记号的本征矢量可以记为 x_{ik}。第一个下标表明特定的分量，第二个下标表明三个本征矢中涉及的那个本征矢。于是，方程组（6.2.5）中具有代表性的方程可以写成

$$\sum_j\lambda_{ij}x_{jk}=\eta_k x_{ik}$$

或者改写成

$$\sum_j\lambda_{ij}x_{jk}=\sum_j x_{ij}\delta_{jk}\eta_k\tag{6.2.7}$$

式（6.2.7）两边都具有矩阵乘积元素的形式，左边是 $\boldsymbol{\lambda}$ 与元素为 x_{ik} 的矩阵 $\boldsymbol{x}$ 的乘积，右边是 $\boldsymbol{x}$ 与第 jk 个元素为 $\delta_{jk}\eta_k$ 的矩阵的乘积。最后那个矩阵是对角矩阵，它的对角元是 $\boldsymbol{\lambda}$ 的本征值。所以我们将把这个矩阵记为 $\boldsymbol{\eta}$

$$\boldsymbol{\eta}=\begin{bmatrix}\eta_1 & 0 & 0\\ 0 & \eta_2 & 0\\ 0 & 0 & \eta_3\end{bmatrix}\tag{6.2.8}$$

而式（6.2.7）也就是矩阵方程

$$\boldsymbol{\lambda x}=\boldsymbol{x\eta}$$

或者用 $\boldsymbol{x}^{-1}$ 左乘上式两端即得

$$\boldsymbol{x}^{-1}\boldsymbol{\lambda x}=\boldsymbol{\eta}\tag{6.2.9}$$

我们看到，式（6.2.9）的左边具有**相似的变换**的形式［只要用符号 $\boldsymbol{y}$ 来记 $\boldsymbol{x}^{-1}$ 就可将它化成式（I.80）的形式］。因此，式（6.2.9）提供了通向本征值问题的

另一条途径：可以试用一个相似变换来使 $\boldsymbol{\lambda}$ 对角化。能实现这一变换的矩阵的每一列是由一个本征矢的分量所组成的。对角化形式的 $\boldsymbol{\lambda}$ 的那些元素则是相应的本征值。

利用 $\boldsymbol{\lambda}$ 矩阵的正交性质即能证明刚体的欧拉定理。设 $\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}$ 表示 $\boldsymbol{\lambda}$ 的转置矩阵。由于 $\boldsymbol{\lambda}$ 矩阵的正交性，则

$$\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{I}$$

考虑表达式

$$(\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}} \tag{6.2.10}$$

如果取构成两边矩阵的行列式，由于矩阵乘积的行列式等于矩阵行列式的乘积，所以可以写出

$$|\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{I}|\,|\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}| \tag{6.2.11}$$

为了描述刚体运动，首先矩阵 $\boldsymbol{\lambda}(t)$ 必须对应于真正的转动，所以 $\boldsymbol{\lambda}$ 及其转置矩阵的行列式必须等于 $+1$。其次，由于一个矩阵的转置矩阵的行列式与该矩阵的行列式一般是相同的［参见式（I.81）］，所以式（6.2.11）中的转置号可以去掉，从而有

$$|\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{I}|=|\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\lambda}|=|-(\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{I})| \tag{6.2.12}$$

式（6.2.12）表明，这个特定的矩阵（$\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{I}$）的行列式与它的负矩阵的行列式相同。设 B 是某个 $n\times n$ 矩阵，则行列式熟悉的性质是

$$|-\boldsymbol{B}|=(-1)^{n}|\boldsymbol{B}|$$

由于我们讨论的问题是三维空间（$n=3$），显然，要式（6.2.12）对任意正常转动都成立，则

$$|\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{I}|=0 \tag{6.2.13}$$

把式（6.2.13）与久期方程（6.2.6）相比较，可以看出，满足式（6.2.6）的本征值之一必定始终等于 $+1$（$\eta=+1$），这正是欧拉定理所需要的结果。

从这里还可看出，在证明刚体转动的欧拉定理时，强调所讨论空间的维数是重要的。在偶数维空间中，尽管式（6.2.12）对所有矩阵都是一个恒等式，但欧拉定理不再适合。例如，在二维情况下，空间内不会有转动后依然不变的矢量——垂直于平面的转轴，因而超出了该空间。

现在来确定三维空间中其他本征值的性质。我们用 η_3 表示 $+1$ 的本征值。由于任何矩阵行列式值都不会受到相似变换的影响［参见式（I.83）］，因此，根据式（6.2.8）和（6.2.9）以及表示转动的矩阵 $\boldsymbol{\lambda}$ 的性质，则有

$$|\boldsymbol{\lambda}|=\eta_1\eta_2\eta_3=\eta_1\eta_2=1 \tag{6.2.14}$$

其次，由于 $\boldsymbol{\lambda}$ 是一个实矩阵，所以如果 η 是久期方程的一个解，那么其复共轭 η^{*}，也必定是该方程的一个解。

如果给定的本征值 η_i 是复数，则满足式（6.2.3）的相应本征矢 $\boldsymbol{R}_i$ 一般也

是复数。按照定义，复矢量的长度（或量值）的平方等于 $\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{R}^*$，或者用矩阵符号表示则为 $\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}^*$，这里加在左边矢量上的转置号表明它是由行矩阵代表的。在实正交变换下，量值平方不变，即

$$\boldsymbol{R}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}'^* = (\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{R})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{R}^* = \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{R}^* = \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}^*$$

现在假定 $\boldsymbol{R}$ 是一个对应于复本征值 η 的复本征矢，根据式（6.2.3）则有

$$\boldsymbol{R}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}'^* = \eta\eta^*\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}^*$$

于是，我们得到结论：表示刚体转动运算的矩阵 $\boldsymbol{\lambda}$ 的所有本征值的量值均等于 1

$$\eta\eta^* = 1 \tag{6.2.15}$$

从这些性质可以推断出本征值有三种可能情况；如果本征值都是实数，则只有两种可能情况：

1）所有本征值都是 +1。因而变换矩阵正好是 $\boldsymbol{I}$，这种情况代表恒等变换。严格地说，这种情况是毫无意义的。

2）有一个本征值为 +1，而另外两个为 −1。这种变换可看作是两个坐标轴在第三轴不变情况下的一次反演。也可以说是绕不变轴方向转过 2π 角度的一次转动。

如果本征值不全是实数，那么只有另外一种可能性，即

3）一个本征为 +1，而另外两个则互为复共轭，形式分别为 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$和 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}$。

总括上述，刚体运动的欧拉定理更完整的表述是：**若刚体有一个固定点，描述刚体运动的任何有价值的实正交矩阵有且仅有一个本征值等于 +1**。

在本征值方程（6.2.5）中，令 $\eta=1$ 并解出 x，y，z，能够得到转动轴的方向余弦[①]。转动角同样也不难求得。通过某一相似变换，总有可能把矩阵 $\boldsymbol{\lambda}$ 变换到 z 轴沿着转动轴的某一坐标系。在这种坐标系中，$\boldsymbol{\lambda}'$代表绕 z 轴的转动，转过的角度为 φ，由此可得

$$\boldsymbol{\lambda}' = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{\lambda}'$的迹则等于

$$\mathrm{sp}\boldsymbol{\lambda}' = 1 + 2\cos\varphi$$

由于迹在相似变换下始终不变，所以对任何初始坐标系，$\boldsymbol{\lambda}$ 的迹必具有相同的形式

$$\mathrm{sp}\boldsymbol{\lambda} = \sum_{i=1}^{3}\lambda_{ii} = 1 + 2\cos\varphi \tag{6.2.16}$$

---

① 如果久期方程有多重根，就不能这样简单地求得相应的本征矢。并不是总有可能使一个一般矩阵完全对角化的。由于欧拉定理表明，所有有价值的正交矩阵的单值根都等于 +1，所以这些例外情况对于目前的考虑并不重要。

此式用矩阵元给出了转动角 φ 的量值。当本征值之和正好等于对角形式(6.2.8)的 $\boldsymbol{\lambda}$ 的迹时，转动角 φ 也与复本征值 η 的相角相等。根据欧拉定理和本征值的性质，本征值之和为

$$\mathrm{sp}\boldsymbol{\lambda} = \sum_i \eta_i = 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} = 1 + 2\cos\varphi$$

显然可见，本征值都是实数的情况，实际上只是具有复数本征值的 $\boldsymbol{\lambda}$ 的特殊情况。所有等于 +1 的 η_i 都与零值转动角 φ 相对应（恒等变换）；而两个本征值为 −1 的情况与 $\varphi=\pi$ 相对应，正像我们前面所看到的那样。

最后我们要特别指出，刚体运动的欧拉定理有一直接的推论：**刚体的最一般位移是平动加转动**。这个推论称为**蔡斯尔**（Chasle）定理。详细证明几乎是不需要的。简单地说，只要去掉具有一个固定点这一运动约束，即能引进本体坐标系原点的三个平动自由度。

上面我们比较仔细地分析了刚体运动的欧拉定理，并作为推论给出了刚体运动的蔡斯尔定理。最后的结论是，刚体的一般运动需要六个独立坐标。其实，如果我们从以下的事实考虑，这一结论好像是不言自明的。我们知道，刚体是一个彼此距离保持不变的质点系，一旦刚体中三个不共线点的位置被确定，则刚体上与这三个点的距离保持不变的所有其余各点的位置也就被完全确定下来。确定这三个点的位置一般需要九个坐标。由于三个点中任意两点的距离是恒定的，因此有三个约束方程，故仅有六个坐标是独立的。

6.3 无限小转动和有限转动

我们知道，矢量必然有量值和方向，但是，有量值和方向的量并不一定是矢量，如果它是矢量，还必须遵从矢量加法的平行四边形法则所满足的对易律，即如果 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是两个矢量，则应有

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \tag{6.3.1}$$

假定联系于变换矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的是“矢量” $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，那么，作为矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 应该满足式（6.3.1)，即它们相加时应是对易的。

但是，两次转动的相加，即一次转动以后再做另一次转动，与两矩阵的乘积是对应的。然而矩阵相乘是不对易的，即 $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$，因而 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 在相加时也不对易，所以它们也不能被当作矢量。有限转动之和与转动次序有关这一结论，可以明显地用一简单实验来验证。例如，图 6.2 说明一个平行六面体经历两次旋转，先绕固定于平行六面体的 x_3 轴转 90°，再绕 x_2 轴转 90°；图 6.3 代表了相同的转动，但次序相反。显然，按两种顺序旋转所得的最后位置迥然不同，故知对易律在这种情况下不成立。也就是说，有限转动不能用一个简单的矢量来表示。

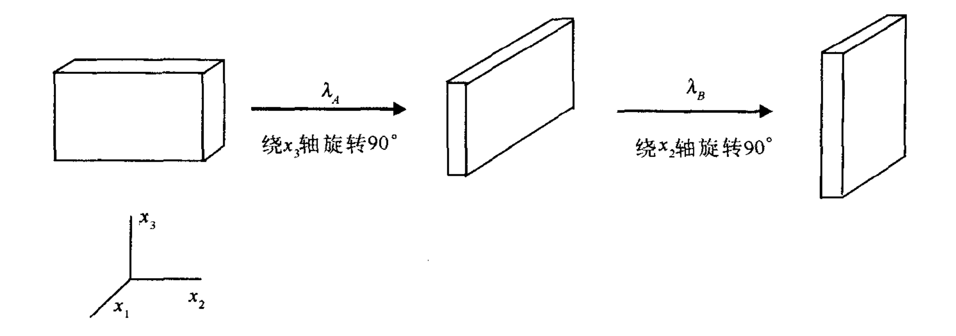


图 6.2 按给定的顺序完成两次转动的结果

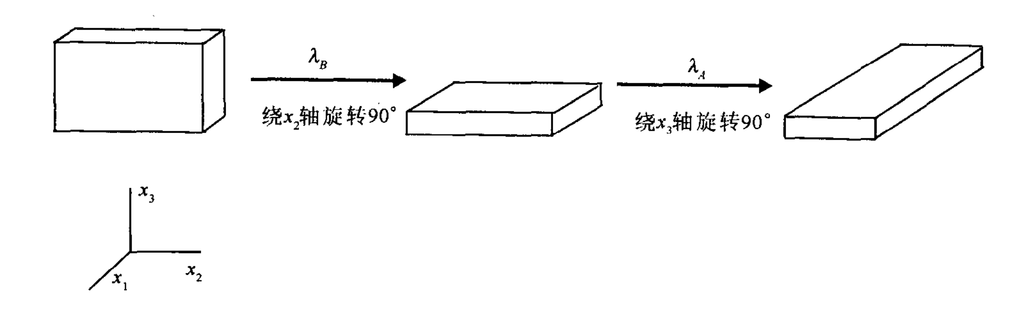


图 6.3 按相反的顺序完成图 6.2 所示两次转动

虽然有限转动不能用一个简单的矢量表示，但如果是**无限小转动**，则情形就与有限转动有所不同。无限小转动是某种坐标轴的正交变换，在这种情况下，由于变化无限小，所以矢量的分量在两个坐标系中几乎相同。也就是说，无限小变换与全同变换

$$x'_1 = x_1, \qquad x'_2 = x_2, \qquad x'_3 = x_3 \tag{6.3.2}$$

的差是无限小。所以可将无限小变换写为

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= (1+\varepsilon_{11})x_1 + \varepsilon_{12}x_2 + \varepsilon_{13}x_3 \\ x_2' &= \varepsilon_{21}x_1 + (1+\varepsilon_{22})x_2 + \varepsilon_{23}x_3 \\ x_3' &= \varepsilon_{31}x_1 + \varepsilon_{32}x_2 + (1+\varepsilon_{33})x_3 \end{aligned}\right\} \tag{6.3.3}$$

其中，ε_{ij}（i，$j=1$，2，3）是无限小。无限小变换方程（6.3.3）也可以写成

$$x_i' = x_i + \sum_j \varepsilon_{ij}x_j \tag{6.3.4}$$

或者

$$x_i' = \sum_j (\delta_{ij} + \varepsilon_{ij}) x_j \tag{6.3.5}$$

其中

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & 当\ i = j\ 时 \\ 0 & 当\ i \neq j\ 时 \end{cases} \tag{6.3.6}$$

认为是单位矩阵的矩阵元。而式（6.3.5）如采用矩阵符号即为

$$\boldsymbol{x}' = (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{\varepsilon})\boldsymbol{x} \tag{6.3.7}$$

式中，$\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵，$\boldsymbol{\varepsilon}$ 为无限小算符。式（6.3.7）表明，无限小变换矩阵的典型形式是 $\boldsymbol{I} + \boldsymbol{\varepsilon}$，也就是说，它几乎是一个恒等变换，至多只相差一个无限小算符。

如果（$\boldsymbol{I} + \boldsymbol{\varepsilon}_1$）和（$\boldsymbol{I} + \boldsymbol{\varepsilon}_2$）分别是两次无限小变换，则两次无限小转动的矩阵积是

$$(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{\varepsilon}_1)(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{\varepsilon}_2) = \boldsymbol{I}^2 + \boldsymbol{\varepsilon}_1\boldsymbol{I} + \boldsymbol{I}\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}_1\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_2 \tag{6.3.8}$$

其中，高级无限小量已经略去。按相反顺序转动的乘积只不过是交换 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}_2$，它对结果没有影响。因为矩阵相加总是可以对易的。可见，运算的次序对无限小变换来说是不重要的，或者换句话说，它们是对易的。因此，无限小转动可以用矢量表示，它满足矢量加法的对易律。但是，有限转动就不满足上述性质，因而有限转动不能用矢量表示，或者说，有限角位移不是矢量。

无限小变换的逆矩阵也不难找到。如 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{\varepsilon}$ 是变换矩阵，则逆矩阵为

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{\varepsilon} \tag{6.3.9}$$

容易证明，乘积 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}$可归结为单位矩阵

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{\varepsilon})(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{I}$$

这与矩阵的定义式（I.58）正好一致。其次，$\boldsymbol{A}$ 的正交性质表明，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}$ 必定等于 $\boldsymbol{A}^{-1}$，正如式（6.3.9）所示，因此，无限小矩阵是反对称矩阵，即

$$\boldsymbol{\varepsilon} = -\boldsymbol{\varepsilon} \tag{6.3.10}$$

或写成矩阵元形式

$$\varepsilon_{ij} = -\varepsilon_{ji} \tag{6.3.11}$$

这里这些概念看似简单，但对于后继课程（比如量子场论）是很有用的。

6.4 刚体运动的广义坐标——欧拉角

实正交矩阵的行列式能够取 +1 和 −1 两个值，在 6.2 节我们证明了只有行列式为 +1 的正交矩阵才可能代表刚体的实际运动。行列式为 −1 的正交矩阵为什么不可能代表刚体的实际位移呢？下面我们举一个简单例子来说明。

考虑一个行列式为 −1 的简单矩阵

$$\boldsymbol{\sigma}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

变换矩阵 $\boldsymbol{\sigma}$ 的作用是改变坐标和各分量的符号（见图 6.4）。这种运算使右手坐标系变换到左手坐标系，因而称为坐标轴的**反射**或**反演**。

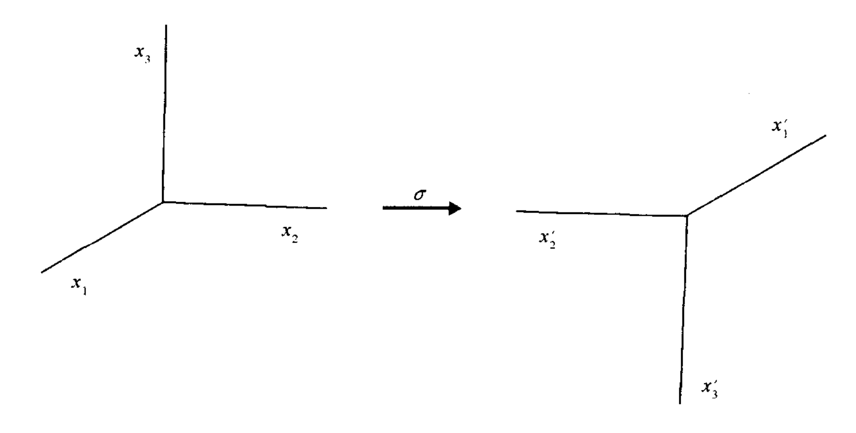


图 6.4　坐标轴的反射

从这一变换的性质可以清楚地看到，右手坐标系反射到左手坐标系不可能通过坐标轴取向的任何**刚性**变化来实现。所以反射绝不会对应于刚体的实际位移。凡是对 $\boldsymbol{\sigma}$ 是正确的，对于行列式为 -1 的任何矩阵也同样适合，因为任何这种矩阵都表达成 $\boldsymbol{\sigma}$ 与行列式为 $+1$ 的矩阵的乘积，因而也就包括反射运算在内。反射运算不可能描述取向的刚性变化。因而代表刚体运动的变换必定限于行列式为 $+1$ 的那些矩阵。

为了用力学中的拉格朗日方法描述刚体运动，必须找到三个独立参量来确定刚体的取向，而且所取方式应保证正交变换矩阵的行列式为 $+1$。只有找到了这样一些广义坐标，才能写出系统的拉格朗日运动方程。当然，对这三个独立的角有各种可能的选法，但最常见和用得最广泛的是所谓**欧拉角**。

从一个坐标系到另一个坐标系的变换可用下述矩阵方程来表示

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{x}' \tag{6.4.1}$$

如果以 x_i' 表示固定坐标系，x_i 为本体坐标系，则旋转矩阵 $\boldsymbol{\lambda}$ 就完全地描述了这两个坐标系的相对取向。现在旋转矩阵 $\boldsymbol{\lambda}$ 包含三个独立的角。其实，实现从一个直角坐标系到另一个直角坐标系的变换，可按照某种特定的顺序相继进行三次转动来完成，所谓欧拉角也就是这三次相继旋转所转过的角度。必须指出，由于在一定的范围内，转动角的选择是任意的，所以欧拉角的名称，甚至生成方式，并不一定是完全一致的，因而在比较不同教程的结果时，务必谨慎。本书所用的

符号和约定在理论力学、应用力学、天体力学、分子物理学和固体物理学中是最通用的。

欧拉角 φ，θ 和 ψ 是由下述三次相继转动把 x_i' 系变换到 x_i 系而生成的：

1）第一次旋转是绕 x_3' 轴逆时针转动 φ 角，如图 6.5（a）所示，把 x_i' 变换到 x_i''。由于转动是在 $x_1'x_2'$ 平面内，所以变换矩阵为

$$\boldsymbol{\lambda}_\varphi=\begin{bmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{6.4.2}$$

角 φ 称为**进动角**。

2）第二次旋转是绕 x_1'' 轴逆时针转动 θ 角，如图 6.5（b）所示，把 x_i'' 变换到 x_i'''。由于现在转动是在 $x_2''x_3''$ 平面内，变换矩阵为

$$\boldsymbol{\lambda}_\theta=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & \sin\theta\\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix} \tag{6.4.3}$$

角 θ 称为**章动角**。

3）第三次旋转是绕 x_3''' 轴逆时针转动 ψ 角，如图 6.5（c）所示，把 x_i''' 变换到 x_i，变换矩阵为

$$\lambda_\psi=\begin{bmatrix}\cos\psi & \sin\psi & 0\\ -\sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{6.4.4}$$

角 ψ 称为**自转角**。包含 x_1 轴与 x_2 轴的平面与包含 x_1' 轴和 x_2' 轴的平面的交线称为**节线**。

由 x_i' 系到 x_i 系的整个变换是由旋转矩阵 $\boldsymbol{\lambda}$ 给出

$$\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\lambda}_\varphi\boldsymbol{\lambda}_\theta\boldsymbol{\lambda}_\psi \tag{6.4.5}$$

$\boldsymbol{\lambda}$ 的矩阵元是

$$\left.\begin{aligned}
\lambda_{11}&=\cos\psi\cos\varphi-\cos\theta\sin\varphi\sin\psi\\
\lambda_{21}&=-\sin\psi\cos\varphi-\cos\theta\sin\varphi\cos\psi\\
\lambda_{31}&=\sin\theta\sin\varphi\\
\lambda_{12}&=\cos\psi\sin\varphi+\cos\theta\cos\varphi\sin\psi\\
\lambda_{22}&=-\sin\psi\sin\varphi+\cos\theta\cos\varphi\cos\psi\\
\lambda_{32}&=-\sin\theta\cos\varphi\\
\lambda_{13}&=\sin\psi\sin\theta\\
\lambda_{23}&=\cos\psi\sin\theta\\
\lambda_{33}&=\cos\theta
\end{aligned}\right\} \tag{6.4.6}$$

从上面的讨论可以看到，φ，θ 和 ψ 这三个角是独立变化的，每个角度的变化不引起其他角度的变化。欧拉角是欧拉在研究地球运动时引入的，因而地心绕太阳旋转的轨道平面 $x'_1x'_2$，称为**黄道面**，地球的极轴为轴 x_3，地球上垂直于极轴的平面 x_1x_2 称为**赤道面**。节线就是赤道面与黄道面的交线。进动角 φ 是节线与轴 x'_1 的夹角；章动角 θ 是极轴 x_3 与黄道面法线 x'_3 的夹角；自转角 ψ 就是自转的角度。

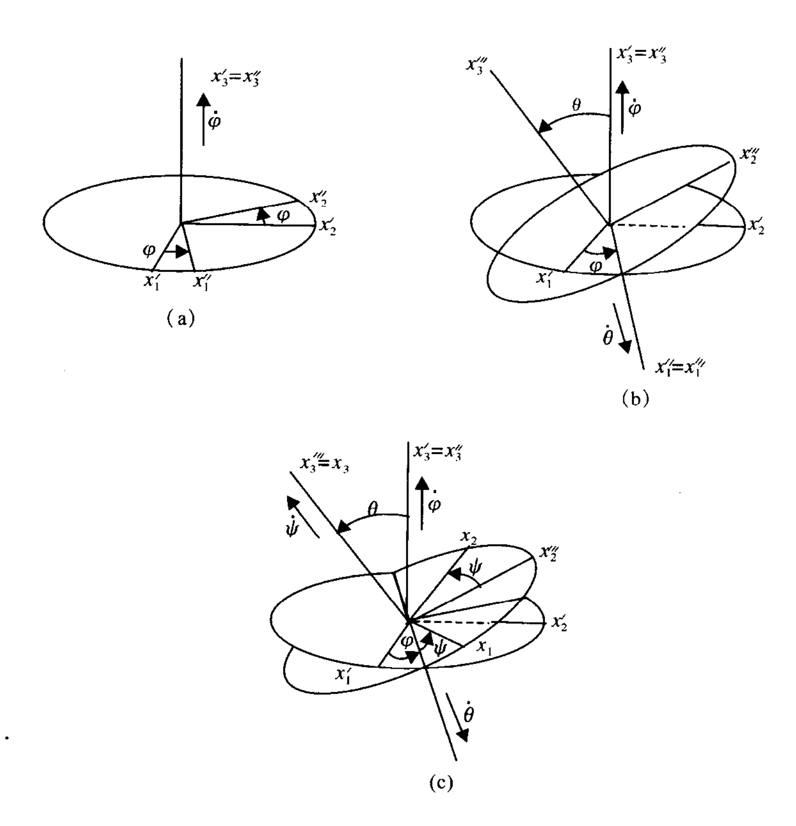


图 6.5 定义欧拉角的三次转动

欧拉角 φ，θ，ψ 变化的区间为

$$0\leqslant\varphi\leqslant2\pi,\qquad 0\leqslant\theta\leqslant\pi,\qquad 0\leqslant\psi\leqslant2\pi$$

由于无限小转动可以表示为矢量，因而可把这些转动角对时间的微商与角速度矢量的分量联系起来，所以

$$\omega_\varphi=\dot{\varphi},\qquad \omega_\theta=\dot{\theta},\qquad \omega_\varphi=\dot{\psi} \tag{6.4.7}$$

刚体运动方程以在本体坐标系（即 x_i 系）中表示最为方便，所以我们须用

该坐标系来表示 $\boldsymbol{\omega}$ 的各个分量。从图 6.5 我们注意到，角速度 $\dot{\boldsymbol{\varphi}}$，$\dot{\boldsymbol{\theta}}$ 和 $\dot{\boldsymbol{\psi}}$ 是沿以下各轴的：

$\dot{\boldsymbol{\varphi}}$ 沿（空间坐标系）x_3'轴；

$\dot{\boldsymbol{\theta}}$沿节线方向；

$\dot{\boldsymbol{\psi}}$ 沿（本体坐标系）x_3 轴。

这些角速度沿本体坐标轴的分量为

$$\dot{\varphi}_1=\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi,\qquad \dot{\varphi}_2=\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi,\qquad \dot{\varphi}_3=\dot{\varphi}\cos\theta \tag{6.4.8}$$

$$\dot{\theta}_1=\dot{\theta}\cos\psi,\qquad \dot{\theta}_2=-\dot{\theta}\sin\psi,\qquad \dot{\theta}_3=0 \tag{6.4.9}$$

$$\dot{\psi}_1=0,\qquad \dot{\psi}_2=0,\qquad \dot{\psi}_3=\dot{\psi} \tag{6.4.10}$$

最后得到 $\boldsymbol{\omega}$ 在本体坐标轴上的分量为

$$\left.\begin{aligned}\omega_1&=\dot{\varphi}_1+\dot{\theta}_1+\dot{\psi}_1=\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi+\dot{\theta}\cos\psi\\ \omega_2&=\dot{\varphi}_2+\dot{\theta}_2+\dot{\psi}_2=\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi-\dot{\theta}\sin\psi\\ \omega_3&=\dot{\varphi}_3+\dot{\theta}_3+\dot{\psi}_3=\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi}\end{aligned}\right\} \tag{6.4.11}$$

我们也可以用类似的方法求出 $\boldsymbol{\omega}$ 在空间坐标轴上的分量

$$\left.\begin{aligned}\omega_1'&=\omega_{x_1'}=\dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi+\dot{\theta}\cos\varphi\\ \omega_2'&=\omega_{x_2'}=-\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi+\dot{\theta}\sin\varphi\\ \omega_3'&=\omega_{x_3'}=\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi}\end{aligned}\right\} \tag{6.4.12}$$

通常把方程（6.4.11）和（6.4.12）通称为**欧拉刚体运动学方程**。

6.5 惯量张量和转动惯量

设我们所考察的刚体由 N 个质量为 m_α（$\alpha=1$，2，3…，N）的质点组成。如果刚体以瞬时角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 绕某定点（相对于本体坐标系而言）转动，而此点又以线速度 $\boldsymbol{V}$ 相对于空间坐标系移动，则第 α 个质点在空间坐标系中的瞬时速度可由式（5.3.13）求得

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{f}\alpha}=\boldsymbol{V}+\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_\alpha$$

由于我们现在讨论的是刚体，而本体坐标系就固接在刚体上，所以

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}=\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{r}}\equiv 0$$

因而

$$\boldsymbol{v}_\alpha = \boldsymbol{V} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_\alpha \tag{6.5.1}$$

其中，表示固定坐标系的下标 f 已略去，所有速度均理解为在固定坐标系中测量。因为我们现在研究的是刚体，相对于转动坐标系（即本体坐标系）的所有速度均为零。所以，刚体上任一点的速度（相对于固定坐标系）可用物体的平移速度与转动速度的矢量和确定。从蔡斯尔定理来看，这是很自然的。

第 α 个质点的动能

$$T_\alpha = \frac{1}{2} m_\alpha \boldsymbol{v}_\alpha^2 \tag{6.5.2}$$

刚体的总动能

$$T = \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha (\boldsymbol{V} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_\alpha)^2 \tag{6.5.3}$$

展开上式中的平方项可得

$$T = \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha \boldsymbol{V}^2 + \sum_\alpha m_\alpha \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_\alpha + \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_\alpha)^2 \tag{6.5.4}$$

这是刚体动能的一般表达式，无论计算 $\boldsymbol{r}_\alpha$ 起点的坐标原点如何选择都成立。但是，如果把本体坐标的原点选作和物体的质心重合，则可使得到的结果大为简化。首先我们注意到式（6.5.4）中右端第二项的 $\boldsymbol{V}$ 和 $\boldsymbol{\omega}$ 均与第 α 个质点的特性无关，因而可把这些量置于求和号外

$$\sum m_\alpha \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_\alpha = \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{\omega} \times \sum m_\alpha \boldsymbol{r}_\alpha \tag{6.5.5}$$

但是

$$\sum m_\alpha \boldsymbol{r}_\alpha = M\boldsymbol{R}$$

式中，$\boldsymbol{R}$ 为质心的位矢。由于我们把本体坐标的原点就选在了质心上，所以质心的位矢 $\boldsymbol{R}$ 为零，于是动能可写作

$$T = T_\mathrm{t} + T_\mathrm{r} \tag{6.5.6}$$

其中

$$T_\mathrm{t} = \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha \boldsymbol{V}^2 = \frac{1}{2} M V^2 \tag{6.5.7}$$

$$T_\mathrm{r} = \frac{1}{2} \sum m_\alpha (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_\alpha)^2 \tag{6.5.8}$$

其中，T_t 和 T_r 分别表示**平动**和**转动动能**（translational and rotational kinetic energies，下标分别取英语平动和转动动能的第一个字母）。这样，我们就把刚体的动能分成了质心的平动动能和绕质心的转动动能两个独立部分。必须强调指出，之所以我们能够把动能分成两部分，完全是由于我们将本体坐标系的原点选择在质心上的缘故。这也正是蔡斯尔定理的结果。

利用矢量运算公式

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})^2=A^2B^2-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})^2$$

即可把转动动能写成

$$T_r=\frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha[\omega^2r_\alpha^2-(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r}_\alpha)^2] \tag{6.5.9}$$

现在用矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 和 $\boldsymbol{r}_\alpha$ 的分量 ω_i 和 $r_{\alpha,i}$ 来表示转动动能。注意到在本体坐标系中

$$\boldsymbol{r}_\alpha=(x_{\alpha,1},\ x_{\alpha,2},\ x_{\alpha,3})$$

所以 $r_{\alpha,i}$ 写成 $x_{\alpha,i}$，即

$$r_{\alpha,i}=x_{\alpha,i}$$

于是，式（6.5.9）现在可以写成

$$T_r=\frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha[(\sum_i\omega_i^2)(\sum_k x_{\alpha,k}^2)-(\sum_i\omega_ix_{\alpha,i})(\sum_j\omega_jx_{\alpha,j})] \tag{6.5.10}$$

利用 δ 函数，我们可以写出

$$\omega_i=\sum_j\omega_j\delta_{ij}$$

这样式（6.5.10）可写成

$$\begin{aligned}T_r&=\frac{1}{2}\sum_\alpha\sum_{i,j}m_\alpha[\omega_i\omega_j\delta_{ij}(\sum_k x_{\alpha,k}^2)-\omega_i\omega_jx_{\alpha,i}x_{\alpha,j}]\\&=\frac{1}{2}\sum_{i,j}\omega_i\omega_j\sum_\alpha m_\alpha[\delta_{ij}\sum_k x_{\alpha,k}^2-x_{\alpha,i}x_{\alpha,j}]\end{aligned} \tag{6.5.11}$$

引入张量记号

$$I_{ij}\equiv\sum_\alpha m_\alpha[\delta_{ij}\sum_k x_{\alpha,k}^2-x_{\alpha,i}x_{\alpha\cdot j}] \tag{6.5.12}$$

那么式（6.5.11）则可写成如下的形式

$$T_r=\frac{1}{2}\sum_{i\cdot j}I_{ij}\omega_i\omega_j \tag{6.5.13}$$

这一关系式在特殊情况下的形式变为

$$T_r=\frac{1}{2}I\omega^2 \tag{6.5.14}$$

其中，I 是对于转动轴的转动惯量（标量）。这一关系式是读者在基础物理中所熟知的转动动能表示式。

张量 $\{I\}$ 称为对 O 点的**惯量张量**。$\{I\}$ 的元素可直接由式（6.5.12）获得。为清晰起见，我们把元素排列起来写成 3×3 的阵列

$$\{I\}=\begin{Bmatrix}\sum_\alpha m_\alpha x_{\alpha,2}^2+x_{\alpha,3}^2 & -\sum_\alpha m_\alpha x_{\alpha,1}x_{\alpha,2} & -\sum_\alpha m_\alpha x_{\alpha,1}x_{\alpha,3}\\ -\sum_\alpha m_\alpha x_{\alpha,2}x_{\alpha,1} & \sum_\alpha m_\alpha(x_{\alpha,1}^2+x_{\alpha,3}^2) & -\sum_x m_\alpha x_{\alpha,2}x_{\alpha,3}\\ -\sum_\alpha m_\alpha x_{\alpha,3}x_{\alpha,1} & -\sum_x m_\alpha x_{\alpha,3}x_{\alpha,2} & \sum_\alpha m_\alpha(x_{\alpha,1}^2+x_{\alpha,2}^2)\end{Bmatrix} \tag{6.5.15}$$

对角元素 I_{11}，I_{22}，I_{33}分别称为 x_1，x_2，x_3 轴的**转动惯量**，非对角元素 I_{12}，I_{13}等的负值称为**惯量积**，因含有两个坐标的乘积而得名。显然惯量张量是对称的，即

$$I_{ij} = I_{ji}$$

由于所有分量都是实数，所以这个张量等于它的伴张量［见附录式（I.77)］，就是说 $\{I\}$ 是自伴的或者厄米的。因而，虽然说惯量张量有九个分量，其中仅有六个分量是独立的，即三个对角元素和三个非对角元素。惯性张量由可加性元素所构成，一物体的惯量张量可以视为这个物体的各部分张量之和。如果物质是连续分布，质量密度为 $\rho = \rho(\boldsymbol{r})$，则

$$I_{ij} = \int_V \rho(\boldsymbol{r})[\delta_{ij}\sum_k x_k^2 - x_i x_j]\mathrm{d}v \tag{6.5.16}$$

其中，V 是物体的体积，$\mathrm{d}v = \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3$，是由矢量 $\boldsymbol{r}$ 所决定的位置处的体积元。

上面提到的转动惯量是读者在基础物理中已熟悉的概念。为了和过去所熟知的形式对照，我们把转动惯量 I_{ii}写成

$$I_{ii} = \sum_\alpha m_\alpha r_{\alpha,i}^2 \tag{6.5.17}$$

其中

$$r_{\alpha,1}^2 = r_{\alpha,2}^2 + r_{\alpha,3}^2,\qquad r_{\alpha,2}^2 = r_{\alpha,1}^2 + r_{\alpha,3}^2,\qquad r_{\alpha,3}^2 = r_{\alpha,1}^2 + r_{\alpha,2}^2$$

由于 $M = \sum_\alpha m_\alpha$，所以可以把转动惯量写成

$$I_{ii} = Mr_{ic}^2 \qquad (i=1,\ 2,\ 3) \tag{6.5.18}$$

式中，r_{ic}称为对 i 轴的**回转半径**。这就是说，从该转轴的效应来看，物体的质量好像集中在距离轴为 r_{ic}的一个圆周上。

图 6.6 正立方体对一角顶点的惯量张量

例 立方体的惯量张量

作为计算惯量张量元素的一个例子，让我们考虑一个密度为 ρ，质量为 M，边长为 b 的匀质立方体。将坐标原点置于一个角的顶点上，相邻的三个边沿着坐标轴（见图 6.6）（这样选择坐标轴，原点显然并未置于质心上，6.7 节我们还会再回到这个问题上来）。

根据式（6.5.16）

$$I_{11} = \rho\int_0^b \mathrm{d}x_3\int_0^b \mathrm{d}x_2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1^2)\int_0^b \mathrm{d}x_1$$

$$= \rho\int_0^b dx_3\int_0^b dx_2(x_2^2 + x_3^2)\int_0^b dx_1$$

$$= \frac{2}{3}\rho b^5 = \frac{2}{3}Mb^2 \tag{1}$$

$$I_{12} = -\rho\int_0^b x_1 dx_1\int_0^b x_2 dx_2\int_0^b dx_3$$

$$= -\frac{1}{4}\rho b^5 = -\frac{1}{4}Mb^2 \tag{2}$$

显然，所有对角元素都相等，而且所有非对角元素也相等。如令

$$\beta = Mb^2 \tag{3}$$

则有

$$\left.\begin{aligned} I_{11} = I_{22} = I_{33} = \frac{2}{3}\beta \\ I_{12} = I_{13} = I_{23} = -\frac{1}{4}\beta \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

于是得立方体的惯量张量为

$$I = \begin{Bmatrix} \frac{2}{3}\beta & -\frac{1}{4}\beta & -\frac{1}{4}\beta \\ -\frac{1}{4}\beta & \frac{2}{3}\beta & -\frac{1}{4}\beta \\ -\frac{1}{4}\beta & -\frac{1}{4}\beta & \frac{2}{3}\beta \end{Bmatrix} \tag{5}$$

6.6 刚体的角动量

相对固定于本体坐标系的某点 O，物体的角动量为

$$\boldsymbol{L} = \sum_\alpha \boldsymbol{r}_\alpha \times \boldsymbol{p}_\alpha \tag{6.6.1}$$

究竟 O 点选在何处方便要依具体问题而定。有两种重要的选择：①如果物体的一点或更多的点是固定的（在固定坐标系中），取 O 点与其中一固定点重合；②如果物体没有一点是固定的，将 O 点选在质心上。

相对于原点取在固定点或质心的本体坐标系，线动量为

$$\boldsymbol{p}_\alpha = m_\alpha \boldsymbol{v}_\alpha = m_\alpha \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_\alpha$$

因此，物体的角动量为

$$\boldsymbol{L} = \sum_\alpha m_\alpha \boldsymbol{r}_\alpha \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_\alpha) \tag{6.6.2}$$

利用矢量运算的恒等式

$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}) = A^2\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})$$

可把角动量 $\boldsymbol{L}$ 表示为

$$\boldsymbol{L} = \sum_\alpha m_\alpha [r_\alpha^2 \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{r}_\alpha(\boldsymbol{r}_\alpha \cdot \boldsymbol{\omega})] \tag{6.6.3}$$

利用 δ 函数的性质，可以写出 $\omega_i = \sum_j \omega_j \delta_{ij}$。由于角动量是个矢量，所以对第 i 个分量有

$$\begin{aligned} L_i &= \sum_\alpha m_\alpha [\omega_i \sum_k x_{\alpha,k}^2 - x_{\alpha,i} \sum_j x_{\alpha,j} \omega_j] \\ &= \sum_\alpha m_\alpha \sum_j [\omega_j \delta_{ij} \sum_k x_{\alpha,k}^2 - \omega_j x_{\alpha,i} x_{\alpha,j}] \\ &= \sum_j \omega_j \sum_\alpha m_\alpha [\delta_{ij} \sum_k x_{\alpha,k}^2 - x_{\alpha,i} x_{\alpha,j}] \end{aligned} \tag{6.6.4}$$

注意到式（6.5.12），即

$$I_{ij} \equiv \sum_\alpha m_\alpha [\delta_{ij} \sum_k x_{\alpha,k}^2 - x_{\alpha,i} x_{\alpha,j}]$$

则式（6.6.4）可以写成

$$L_i = \sum_j I_{ij} \omega_j \tag{6.6.5}$$

对上式两边乘以 $\frac{1}{2}\omega_i$，并对 i 求和，则可得出另一结果

$$\frac{1}{2} \sum_i \omega_i L_i = \frac{1}{2} \sum_{i,j} I_{ij} \omega_i \omega_j$$

根据式（6.5.13），上式右端恰好是刚体的转动动能 T_r，所以

$$T_r = \frac{1}{2} \sum_i \omega_i L_i \tag{6.6.6}$$

或把上式写成矢量形式

$$T_r = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{L} \tag{6.6.7}$$

6.7　惯 量 主 轴

很显然，如果惯量张量只有对角元素，则动能 T 和角动量 $\boldsymbol{L}$ 的表达式就会变得特别简单。若 I_{ij} 可以写为

$$I_{ij} = I_i \delta_{ij} \tag{6.7.1}$$

那么惯量张量为

$$\{I\} = \begin{Bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{Bmatrix} \tag{6.7.2}$$

从而，角动量的分量表达式为

$$L_i = \sum_j I_i \delta_{ij} \omega_j = I_i \omega_i \tag{6.7.3}$$

转动动能为

$$T_r = \frac{1}{2} \sum_{i,j} I_i \delta_{ij} \omega_i \omega_j = \frac{1}{2} \sum_i I_i \omega_i^2 \tag{6.7.4}$$

可见，由于惯量张量 $\{I\}$ 只有对角元素，确实使角动量和转动动能的表达式都非常简单。利用矩阵代数的方法能够证明，对刚体上任一点，总可找到一组直角坐标轴，使得非对角元素（惯量积）为零，从而惯量张量是对角化的，这样的本体坐标轴称为**惯量主轴**，而相应的张量分量的值称为**主转动惯量**，并用 I_1，I_2，I_3 表示。给出了某个初始的本体坐标系，能够通过特定的正交变换变换到主轴，这种特定的正交变换就称为**主轴变换**。事实上，主转动惯量当然是矩阵 $[I]$ 的本征值，它们将作为特征方程的根来求解。

如果物体绕一主轴转动，则按照式（6.7.3），角速度和角动量的方向均沿此轴。设 I 是绕这个轴的转动惯量，于是可以写出

$$\boldsymbol{L} = I\boldsymbol{\omega} \tag{6.7.5}$$

利用式（6.7.3）和（6.6.5）可把上式写成分量形式

$$\left.\begin{aligned} L_1 = I\omega_1 = I_{11}\omega_1 + I_{12}\omega_2 + I_{13}\omega_3 \\ L_2 = I\omega_2 = I_{21}\omega_1 + I_{22}\omega_2 + I_{23}\omega_3 \\ L_3 = I\omega_3 = I_{31}\omega_1 + I_{32}\omega_2 + I_{33}\omega_3 \end{aligned}\right\} \tag{6.7.6}$$

如将同类项合并可得

$$\left.\begin{aligned} (I_{11} - I)\omega_1 + I_{12}\omega_2 + I_{13}\omega_3 = 0 \\ I_{21}\omega_1 + (I_{22} - I)\omega_2 + I_{23}\omega_3 = 0 \\ I_{31}\omega_1 + I_{32}\omega_2 + (I_{33} - I)\omega_3 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{6.7.7}$$

这是个线性齐次方程组，只有其系数行列式为零时，即

$$\begin{vmatrix} I_{11} - I & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} - I & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} - I \end{vmatrix} = 0 \tag{6.7.8}$$

方程（6.7.7）才有非平庸解。方程（6.7.8）称为**特征方程**或**久期方程**。此式明显地显示了 $\{I\}$ 的对称性。方程（6.7.8）是 I 的三次式，它的三个根正是所要求的主转动惯量。

应该指出，主转动惯量中任一个都不能大于其余二者之和，譬如说，必有 $I_1 + I_2 \geqslant I_3$。

三个主转动惯量互不相等的物体叫做**非对称陀螺**。

如果刚体两个主转动惯量相等，例如 $I_1 = I_2 \neq I_3$，则叫做**对称陀螺**。在这种情况下，在平面 x_1x_2 内主轴方向的选择是任意的。

如果刚体所有三个主转动惯量都相等，则叫做**球形陀螺**。在这种情况下，三个惯量主轴都可以任意选择：可取任意三个相互垂直的轴作惯量主轴。

刚体力学中所遇到的大部分问题中物体具有规则形状。如果刚体具有某种对称性，则惯量主轴的寻找就要容易得多。显然，质心的位置和惯量主轴的方向应该具备同样的对称性。

例如，如果物体具有对称平面，那么质心应在这个平面内。两个惯量主轴也在这个平面内，而第三个惯量主轴则垂直于此平面。这种情形最明显的例子是分布在一个平面内的质点系。在这种情况下三个主转动惯量之间存在着简单的关系。如果选取系统的平面作为 x_1x_2 平面，那么，由于对于所有的质点 $x_3=0$，则

$$I_1 = \sum_\alpha m_\alpha x_{\alpha,2}^2, \qquad I_2 = \sum_\alpha m_\alpha x_{\alpha,1}^2, \qquad I_3 = \sum_\alpha m_\alpha (x_{\alpha,1}^2 + x_{\alpha,2}^2)$$

因此，

$$I_3 = I_1 + I_2 \tag{6.7.9}$$

又如直线分布的质点系，若选取这条直线作为 x_3 轴，那么对于所有的质点，$x_1=x_2=0$，所以两个主转动惯量相等，而第三个等于零，即

$$I_1 = I_2 = \sum_\alpha m_\alpha x_{\alpha,3}^2, \qquad I_3 = 0 \tag{6.7.10}$$

这样的质点系叫做**转子**。转子和任意物体的一般情况不同的特殊性质在于它只有相应于绕轴 x_1 和 x_2 转动的两个（而不是三个）转动自由度。说直线绕自身转动显然是没有意义的。双原子分子就是转子的一个实例。

例　正立方体的惯量主轴

在 6.5 节的例中我们看到，当把原点选在一个角的顶点时，它的转动惯量张量具有不为零的非对角元素。很显然，该计算中所选的坐标轴不是主轴。如果立方体绕 x_3 轴旋转，于是 $\boldsymbol{\omega}=\omega\boldsymbol{e}_3$，而角动量 $\boldsymbol{L}$ 的分量为［参阅式（6.7.6）］

$$L_1 = -\frac{1}{4}\beta\,\omega_3, \qquad L_2 = -\frac{1}{4}\beta\,\omega_3, \qquad L_3 = \frac{2}{3}\beta\,\omega_3 \tag{1}$$

其中，$\beta = Mb^2$。所以

$$\boldsymbol{L} = Mb^2\omega_3\left(-\frac{1}{4}\boldsymbol{e}_1 - \frac{1}{4}\boldsymbol{e}_2 + \frac{2}{3}\boldsymbol{e}_3\right) \tag{2}$$

很明显，$\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{\omega}$ 未在同一方向上。

为寻求主转动惯量，我们必须解久期方程

$$\begin{vmatrix} \frac{2}{3}\beta - I & -\frac{1}{4}\beta & -\frac{1}{4}\beta \\ -\frac{1}{4}\beta & \frac{2}{3}\beta - I & -\frac{1}{4}\beta \\ -\frac{1}{4}\beta & -\frac{1}{4}\beta & \frac{2}{3}\beta - I \end{vmatrix} = 0 \tag{3}$$

由行列式的理论知,对任一行(或列)加上(或减去)另一行(或列)不影响行列式的值。若从方程(3)的行列式中的第二行减去第一行,则方程(3)会变得更容易求解

$$\begin{vmatrix} \frac{2}{3}\beta - I & -\frac{1}{4}\beta & -\frac{1}{4}\beta \\ -\frac{11}{12}\beta + I & \frac{11}{12}\beta - I & 0 \\ -\frac{1}{4}\beta & \frac{2}{3}\beta - I & -\frac{2}{3}\beta - I \end{vmatrix} = 0 \tag{4}$$

可从第二行中提出因子$\left(\frac{11}{12}\beta - I\right)$，即

$$\left(\frac{11}{12}\beta - I\right)\begin{vmatrix} \frac{2}{3}\beta - I & -\frac{1}{4}\beta & -\frac{1}{4}\beta \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4}\beta & -\frac{1}{4}\beta & -\frac{2}{3}\beta - I \end{vmatrix} = 0 \tag{5}$$

把行列式展开得

$$\left(\frac{11}{12}\beta - I\right)\left[\left(\frac{2}{3}\beta - I\right)^2 - \frac{1}{8}\beta^2 - \frac{1}{4}\beta\left(\frac{2}{3}\beta - I\right)\right] = 0 \tag{6}$$

将上式进行因式分解得

$$\left(\frac{1}{6}\beta - I\right)\left(\frac{11}{12}\beta - I\right)\left(\frac{11}{12}\beta - I\right) = 0 \tag{7}$$

因此，我们求得以下各根，这些根即给出主转动惯量

$$I_1 = \frac{1}{6}\beta, \qquad I_2 = \frac{11}{12}\beta, \qquad I_3 = \frac{11}{12}\beta \tag{8}$$

而对角化的转动惯量张量为

$$\{I\} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{6}\beta & 0 & 0 \\ 0 & \frac{11}{12}\beta & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{12}\beta \end{Bmatrix} \tag{9}$$

由于根中有两个根是相等的，$I_2 = I_3$，所以与 I_1 相联系的主轴必定是对称轴。

为了求得与 I_1 联系的主轴方向，我们把方程（6.7.6）中的 I 值用 $I = I_1 = \frac{1}{6}\beta$ 替代得

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{2}{3}\beta - \frac{1}{6}\beta\right)\omega_{11} - \frac{1}{4}\beta\,\omega_{21} - \frac{1}{4}\beta\,\omega_{31} = 0 \\ -\frac{1}{4}\beta\,\omega_{11} + \left(\frac{2}{3}\beta - \frac{1}{6}\beta\right)\omega_{21} - \frac{1}{4}\beta\,\omega_{31} = 0 \\ -\frac{1}{4}\beta\,\omega_{11} - \frac{1}{4}\omega_{21} + \left(\frac{2}{3}\beta - \frac{1}{6}\beta\right)\omega_{31} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

其中，ω_i 的第二个下标 1 表示我们考虑的是与 I_1 相联系的主轴。

以$\frac{1}{4}\beta$去除方程组的前二式得

$$\left.\begin{aligned}2\omega_{11}-\omega_{21}-\omega_{31}=0\\-\omega_{11}+2\omega_{21}-\omega_{31}=0\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

从上式中的第一式减去第二式得 $\omega_{11}=\omega_{21}$。再把这个结果代入式（11）中任一方程，我们得到 $\omega_{11}=\omega_{21}=\omega_{31}$，所求得之比为

$$\omega_{11}:\omega_{21}:\omega_{31}=1:1:1\tag{12}$$

因此，当立方体绕与转动惯量 $I_1=\frac{1}{6}\beta=\frac{1}{6}Mb^2$ 相联系的轴转动时，$\boldsymbol{\omega}$ 在三个坐标轴的各个投影全相等。所以，这个主轴相当于立方体的对角线。

由于 I_2 与 I_3 相等，与这些转动惯量相联系的主轴的取向是任意的，它们只须位于垂直立方体对角线的平面内即可。

6.8 不同本体坐标系的惯量张量

为了能够把刚体的动能分成平动和转动两部分［见式（6.5.6)]，一般来说，需要选取把原点置于质心的本体坐标系。对于某些几何形状的物体，用这样的坐标系来计算惯量张量的元素往往并不是很方便。因而，我们考虑另外一套坐标系 X_i，它仍然固接在刚体上，其坐标轴 X_i 与 x_i 取向相同，只是它的原点 Q 并不像 x_i 系的原点 O 选在位于刚体的质心上，Q 点可以在所考察的物体上，也可以在物体之外。

相对于 X_i 的惯量张量元素以 J_{ij} 标记，以区别于相对于 x_i 的 I_{ij}，那么

$$J_{ij}=\sum_{\alpha}m_{\alpha}\Big[\delta_{ij}\sum_{k}X_{\alpha,k}^2-X_{\alpha,i}X_{\alpha,j}\Big]\tag{6.8.1}$$

如果连接 Q 和 O 点的矢量记作 $\boldsymbol{a}$，刚体上某点 P 相对 X_i 轴系的位矢 $\boldsymbol{R}$ 与本体坐标系位矢 $\boldsymbol{r}$ 的关系为（见图 6.7）

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{r}\tag{6.8.2}$$

其分量为

$$X_i=a_i+x_i\tag{6.8.3}$$

将式（6.8.3）代入式（6.8.1），张量元素 J_{ij} 变为

$$\begin{aligned}J_{ij}&=\sum_{\alpha}m_{\alpha}\Big[\delta_{ij}\sum_{k}(x_{\alpha,k}+a_k)^2-(x_{\alpha,i}+a_i)(x_{\alpha,j}+a_j)\Big]\\&=\sum_{\alpha}m_{\alpha}\Big[\delta_{ij}\sum_{k}x_{\alpha,k}^2-x_{\alpha,i}x_{\alpha,j}\Big]\\&\quad+\sum_{\alpha}m_{\alpha}\Big[\delta_{ij}\sum_{k}(2x_{\alpha,k}a_k+a_k^2)-(a_ix_{\alpha,j}+a_jx_{\alpha,i}+a_ia_j)\Big]\end{aligned}\tag{6.8.4}$$

第一项求和就是 I_{ij}，第二项求和进行重新组合，上式可以写作

$$J_{ij} = I_{ij} + \sum_{\alpha} m_{\alpha}[\delta_{ij} \sum_{k} a_k^2 - a_i a_j] + \sum_{\alpha} m_{\alpha}[2\delta_{ij} \sum_{k} x_{\alpha,k} a_k - a_i x_{\alpha,j} - a_j x_{\alpha,i}] \tag{6.8.5}$$

上式最后的求和中每一项均包含如下形式的和

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha,k}$$

然而，因为 O 点取在质心上，所以

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} \boldsymbol{r}_{\alpha} = 0$$

或者，对第 k 个分量

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha,k} = 0$$

因此，式（6.8.5）中所有这样的项均为零，于是

$$J_{ij} = I_{ij} + \sum_{\alpha} m_{\alpha}(\delta_{ij} \sum_{k} a_k^2 - a_i a_j) \tag{6.8.6}$$

但是

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} = M, \qquad \sum_{k} a_k^2 \equiv a^2$$

解出 I_{ij}，最后得到

$$I_{ij} = J_{ij} - M(a^2 \delta_{ij} - a_i a_j) \tag{6.8.7}$$

可见，一旦知道相对于 X_i 各轴的惯量张量元素，就由此式可计算出欲求的原点在质心的惯量张量元素 I_{ij}。式（6.8.7）的第二项乃是质量为 M 的点相对于原点 Q 的惯量张量。

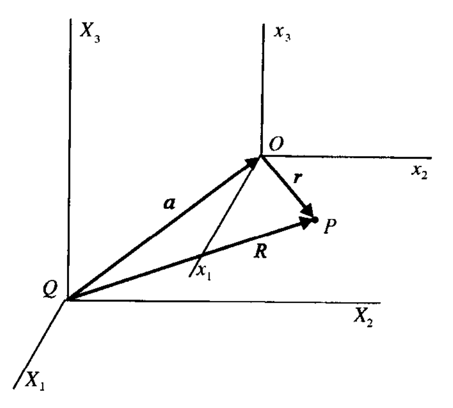


图 6.7 不同的本体坐标系

式（6.8.7）是所谓**平行轴定理**的一般形式。例如考虑图 6.8，元素 I_{11}为

$$I_{11} = J_{11} - M[(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)\delta_{11} - a_1^2] = J_{11} - M(a_2^2 + a_3^2)$$

此式表示两种转动惯量张量各元素之间的差等于物体质量乘以平行轴间（在此情况下为 x_1 轴与 X_1 轴之间）距离的平方。

例 *用平行轴定理求正立方体惯量张量*

我们重新回到正立方体的问题上来。在 6.5 节我们曾求出均质正立方体对于一个角的顶点为原点的惯量张量为［见 6.5 节中例的式（5）］

$$\{J\} = \begin{Bmatrix} \frac{2}{3}Mb^2 & -\frac{1}{4}Mb^2 & -\frac{1}{4}Mb^2 \\ -\frac{1}{4}Mb^2 & \frac{2}{3}Mb^2 & -\frac{1}{4}Mb^2 \\ -\frac{1}{4}Mb^2 & -\frac{1}{4}Mb^2 & \frac{2}{3}Mb^2 \end{Bmatrix} \tag{1}$$

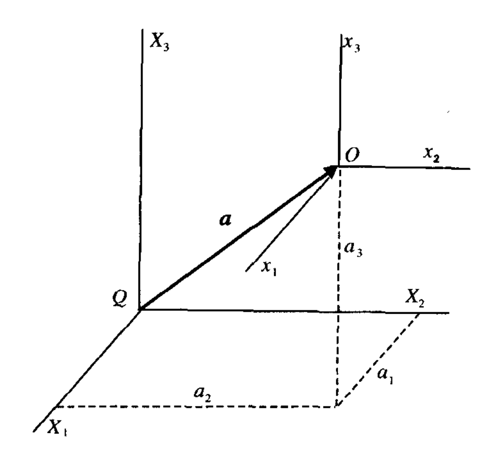


图 6.8　两个坐标轴互相平行的坐标系

现在我们用式（6.8.7）的平行轴定理来求立方体相对于原点取在质心的坐标系的惯量张量。为与本节的符号保持一致，我们称原点在 O 的新坐标轴为 x_i 轴，而称原点在立方体一角顶点 Q 的旧坐标轴为 X_i 轴（见图 6.9）。

在 X_i 坐标系中，立方体质心位于点（$b/2$，$b/2$，$b/2$）处，因而矢量 $\boldsymbol{a}$ 的分量为

$$a_1 = a_2 = a_3 = \frac{b}{2} \tag{2}$$

由式（1）我们有

$$\left.\begin{aligned} J_{11} = J_{22} = J_{33} = \frac{2}{3}Mb^2 \\ J_{12} = J_{13} = J_{23} = -\frac{1}{4}Mb^2 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

再应用式（6.8.7），我们求得

$$\begin{aligned} I_{11} &= J_{11} - M(a^2 - a_1^2) \\ &= I_{11} - M(a_2^2 + a_3^2) \\ &= \frac{2}{3}Mb^2 - \frac{1}{2}Mb^2 = \frac{1}{6}Mb^2 \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} I_{12} &= J_{12} - M(-a_1a_2) \\ &= -\frac{1}{4}Mb^2 + \frac{1}{4}Mb^2 = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

总之

$$\left.\begin{aligned} I_{11} = I_{22} = I_{33} = \frac{1}{6}Mb^2 \\ I_{12} = I_{13} = I_{23} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

所以，惯量张量是对角化的

$$\{I\} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{6}Mb^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6}Mb^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6}Mb^2 \end{Bmatrix} \tag{7}$$

如果把公共项$\frac{1}{6}Mb^2$从表示式提出来，惯量张量可以写成

$$\{I\} = \frac{1}{6}Mb^2 \ \{1\} \tag{8}$$

其中，$\{1\}$ 为单位张量

$$\{1\} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \tag{9}$$

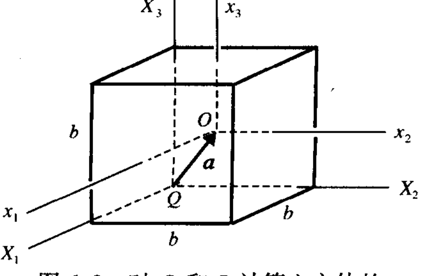


图 6.9 对 Q 和 O 计算立方体的转动惯张量

我们发现，当把原点选在立方体的质心时，各个主轴是垂直于立方体各个面的。从物理观点来看，我们无法把这些轴区分开来，在这种情形下，各主转动惯量都是相等的。我们还注意到，只要使原点保持在质心上，对于坐标轴的任何取向，其惯量张量都是相同的。

6.9 刚体运动的欧拉方程

6.9.1 刚体自由运动的欧拉方程

我们先来讨论刚体的自由运动。在这种情形下，刚体不受任何力或力矩的作用，势能为零，拉格朗日函数 L 即为转动的动能 T①。若我们选取 x_i 轴对应于刚体的主轴，则由式 (6.7.4)，刚体的转动动能

$$T = \frac{1}{2}\sum_i I_i \omega_i^2 \tag{6.9.1}$$

注意：这里已将转动动能 T 的下标 "r" 略去了。如选欧拉角作为广义坐标，则对于坐标 ψ 的拉格朗日方程为

$$\frac{\partial T}{\partial \psi} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = 0 \tag{6.9.2}$$

此方程还可写为

① 由于运动不受力，平动动能在此无关紧要。因为我们总可以变换坐标系，使物体的质心在其中为静止的。

$$\sum_i \frac{\partial T}{\partial \omega_i}\frac{\partial \omega_i}{\partial \psi} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_i \frac{\partial T}{\partial \omega_i}\frac{\partial \omega_i}{\partial \dot{\psi}} = 0 \tag{6.9.3}$$

由式（6.4.11）知，$\boldsymbol{\omega}$ 在本体坐标轴上的分量为

$$\left.\begin{aligned}\omega_1 &= \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi\\ \omega_2 &= \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi\\ \omega_3 &= \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}\end{aligned}\right\} \tag{6.9.4}$$

将 ω_i 对 ψ 进行微商

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \omega_1}{\partial \psi} &= \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi = \omega_2\\ \frac{\partial \omega_2}{\partial \psi} &= -\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi - \dot{\theta}\cos\psi = -\omega_1\\ \frac{\partial \omega_3}{\partial \psi} &= 0\end{aligned}\right\} \tag{6.9.5}$$

将 ω_i 对 $\dot{\psi}$ 进行微商

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \omega_1}{\partial \dot{\psi}} &= \frac{\partial \omega_2}{\partial \dot{\psi}} = 0\\ \frac{\partial \omega_3}{\partial \dot{\psi}} &= 1\end{aligned}\right\} \tag{6.9.6}$$

将式（6.9.1）对 ω_i 求微商

$$\frac{\partial T}{\partial \omega_i} = I_i\omega_i \tag{6.9.7}$$

把以上的微商结果代入式（6.9.3）得

$$I_1\omega_1\omega_2 + I_2\omega_2(-\omega_2) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I_3\omega_3 = 0$$

对上式进行简单地整理得

$$(I_1 - I_2)\ \omega_1\omega_2 - I_3\dot{\omega}_3 = 0 \tag{6.9.8}$$

由于把哪一个主轴记作 x_3 完全是任意的，所以只要将上式的指标轮换即可得到有关 $\dot{\omega}_1$ 和 $\dot{\omega}_2$ 的关系式。我们将三个方程排在一起写成如下形式

$$\left.\begin{aligned}(I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 - I_3\dot{\omega}_3 &= 0\\ (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 - I_1\dot{\omega}_1 &= 0\\ (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 - I_2\dot{\omega}_2 &= 0\end{aligned}\right\} \tag{6.9.9}$$

若用排列符号 ε_{ijk} 可把式（6.9.9）的三个方程统一成一个方程

$$(I_i - I_j)\omega_i\omega_j - \sum_k \varepsilon_{ijk}I_k\dot{\omega}_k = 0 \tag{6.9.10}$$

式中，ε_{ijk} 的定义为

$$\varepsilon_{ijk}=\begin{cases}+1 & \text{当 } ijk \text{ 进行偶次置换可还原为 123 的自然次序}\\ -1 & \text{当 } ijk \text{ 进行奇次置换可还原为 123 的自然次序}\\ 0 & \text{当 } ijk \text{ 有任意二指标相等}\end{cases} \tag{6.9.11}$$

我们这里称作排列符号的 ε_{ijk}，实际上是三阶单位反对称张量。理论物理学很多地方都会用到。

式（6.9.10）或（6.9.9）所给出的三个方程称为刚体自由运动的**欧拉方程**。提请读者特别注意，虽然对于 $\dot{\omega}_3$ 的方程（6.9.8）的确是坐标 ψ 的拉格朗日方程，而方程（6.9.9）中对于 $\dot{\omega}_1$ 和 $\dot{\omega}_2$ 的欧拉方程却不是 θ 和 φ 的拉格朗日方程。

6.9.2 力场中刚体运动的欧拉方程

为了获得在力场中运动的欧拉方程，我们从力矩 $\boldsymbol{N}$ 的基本关系式（1.14.8）出发

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{f}}=\boldsymbol{N} \tag{6.9.12}$$

式（6.9.12）中的记号“f”明确指这里的时间微商 $\dot{\boldsymbol{L}}$ 是对固定坐标系（fixed coordinate system），也就是对惯性坐标系的。因为这个关系式是由牛顿方程导出来的，所以仅在惯性系才成立。根据式（5.3.7）我们有

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{f}}=\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{b}}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{L} \tag{6.9.13}$$

式中，右端第一项的记号“b”是英文 body 的第一个字母，表示这一项是本体坐标（body coordinate system）中对时间的微商。这里的本体坐标系与式（5.3.7）的转动坐标系对应。

式（6.9.13）也可写成

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{b}}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{L}=\boldsymbol{N} \tag{6.9.14}$$

这个方程沿 x_3 轴（注意这是一本体坐标轴）的分量为

$$\dot{L}_3+\omega_1L_2-\omega_2L_1=N_3 \tag{6.9.15}$$

但是，由于我们所选取的 x_i 轴和刚体的主轴重合，根据式（6.7.3）则有

$$L_i=I_i\omega_i \tag{6.9.16}$$

将式（6.9.16）代入式（6.9.15）得

$$I_3\dot{\omega}_3-(I_1-I_2)\omega_1\omega_2=N_3$$

将上式的下标轮换即可得 $\dot{\omega}_1$ 和 $\dot{\omega}_2$ 的方程，于是可以写出

$$\left.\begin{aligned}I_1\dot{\omega}_1-(I_2-I_3)\omega_2\omega_3=N_1\\ I_2\dot{\omega}_2-(I_3-I_1)\omega_3\omega_1=N_2\\ I_3\dot{\omega}_3-(I_1-I_2)\omega_1\omega_2=N_3\end{aligned}\right\} \tag{6.9.17}$$

或者给上式所有各式两端同乘一负号写成如下形式

$$\left.\begin{aligned}(I_2-I_3)\ \omega_2\omega_3-\ (I_1\dot{\omega}_1-N_1)\ &=0\\(I_3-I_1)\ \omega_3\omega_1-\ (I_2\dot{\omega}_2-N_2)\ &=0\\(I_1-I_2)\ \omega_1\omega_2-\ (I_3\dot{\omega}_3-N_3)\ &=0\end{aligned}\right\}\tag{6.9.18}$$

利用排列符号，我们把式（6.9.18）写成一个统一的公式

$$(I_i-I_j)\omega_i\omega_j-\sum_k\varepsilon_{ijk}(I_k\dot{\omega}_k-N_k)=0\tag{6.9.19}$$

方程（6.9.19）或（6.9.18）就是在力场中刚体运动的**欧拉方程**。

值得注意的是，我们从欧拉方程看到，刚体的运动仅仅通过 I_1，I_2 和 I_3 这三个数（也就是通过主转动惯量）与物体的结构相联系。因此，任意两个具有相同主转动惯量的物体，无论它们具有多么不同的形状，仍将以完全相同的方式运动（当然，诸如摩擦阻力效应是与物体形状有关的，但在我们的讨论中都被忽略了）。

6.10 对称陀螺的自由运动

如果我们考虑一个对称陀螺，也就是具有 $I_1=I_2\neq I_3$ 的刚体，那么自由运动的欧拉方程（6.9.9）变为

$$\left.\begin{aligned}(I_{12}-I_3)\ \omega_2\omega_3-I_{12}\dot{\omega}_1&=0\\(I_3-I_{12})\ \omega_3\omega_1-I_{12}\dot{\omega}_2&=0\\I_3\dot{\omega}_3&=0\end{aligned}\right\}\tag{6.10.1}$$

式中，I_{12}替代了 I_1 和 I_2。因为对于自由运动而言，刚体的质心相对于固定坐标系（惯性参考系）或者静止，或者匀速直线运动。所以我们可以规定质心是静止的，并让固定坐标系的原点位于质心上，这样做并无损于问题的普遍性。

将式（6.10.1）的第三个方程积分得

$$\omega_3(t)=\text{const}\tag{6.10.2}$$

式（6.10.1）的前两个方程可以化为

$$\left.\begin{aligned}\dot{\omega}_1&=-\left(\frac{I_3-I_{12}}{I_{12}}\omega_3\right)\omega_2\\\dot{\omega}_2&=\left(\frac{I_3-I_{12}}{I_{12}}\omega_3\right)\omega_1\end{aligned}\right\}\tag{6.10.3}$$

因括号中的因子相同，并构成常数，故可令

$$\Omega\equiv\frac{I_3-I_{12}}{I_{12}}\omega_3\tag{6.10.4}$$

所以

$$\left.\begin{aligned}\dot{\omega}_1+\Omega\omega_2=0\\ \dot{\omega}_2-\Omega\omega_1=0\end{aligned}\right\}\tag{6.10.5}$$

这是一对形式熟悉的耦合方程，给第二个方程乘以 i 加上第一个方程可得

$$\dot{\omega}_1+\mathrm{i}\dot{\omega}_2-\mathrm{i}\Omega(\omega_1+\mathrm{i}\omega_2)=0\tag{6.10.6}$$

若令

$$\eta\equiv\omega_1+\mathrm{i}\omega_2\tag{6.10.7}$$

那么方程（6.10.6）可以写成

$$\dot{\eta}-\mathrm{i}\Omega\eta=0\tag{6.10.8}$$

其解为

$$\eta(t)=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t}\tag{6.10.9}$$

从而

$$\omega_1+\mathrm{i}\omega_2=A\cos\Omega t+\mathrm{i}A\sin\Omega t\tag{6.10.10}$$

因此

$$\left.\begin{aligned}\omega_1(t)=A\cos\Omega t\\ \omega_2(t)=A\sin\Omega t\end{aligned}\right\}\tag{6.10.11}$$

因 $\omega_3=\text{const}$，我们注意到 $\boldsymbol{\omega}$ 的量值也是常数

$$|\boldsymbol{\omega}|=\omega=\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2}=\sqrt{A^2+\omega_3^2}=\text{const}\tag{6.10.12}$$

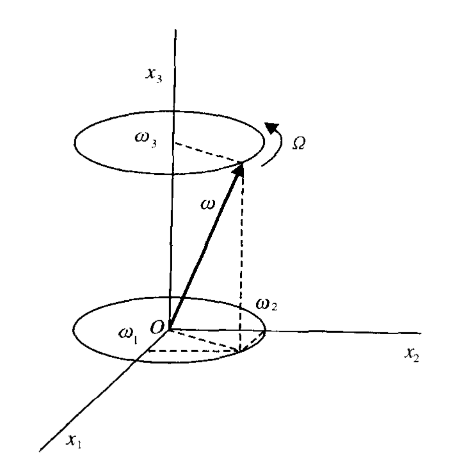
方程（6.10.11）是圆的参数方程，矢量 $\boldsymbol{\omega}$（绝对值是常数）在 x_1x_2 平面的投影可以用一个随着时间变化的圆描述，如图 6.10 所示。

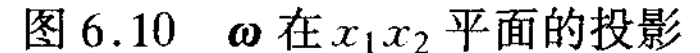
既然 x_3 轴是刚体的对称轴，那么我们发现角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 绕着本体坐标的 x_3 轴以恒定的角频率 Ω 旋转（进动）。因此，在本体坐标中的观察者来看，$\boldsymbol{\omega}$ 绕刚体对称轴描绘了一个圆锥面。

因我们考虑的是自由运动，角动量矢量 $\boldsymbol{L}$ 在固定坐标系是静止的，且是不随时间变化的常矢量。特别是因刚体质心是固定的，所以转动动能亦是常量

$$T_{\mathrm{r}}=\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{L}=\text{const}$$

但已有 $\boldsymbol{L}=\text{const}$，故角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 在固定的角动量矢量方向的投影不变。因而，$\boldsymbol{\omega}$ 绕 $\boldsymbol{L}$ 以不变的夹角进动。$\boldsymbol{L}$，$\boldsymbol{\omega}$ 和 x_3 轴（本体坐标的坐标轴，其单位矢量为 $\boldsymbol{e}_3$）位于同一平面内。因此，若固定坐标系中 x_3' 轴和 $\boldsymbol{L}$ 重合，在固定坐标系中的观察者来看，$\boldsymbol{\omega}$ 绕固定的 x_3' 轴描绘出一个圆锥面，这种情况可以用一个锥面在另一个锥面上的滚动来描述，如图 6.11 所示，$\boldsymbol{\omega}$ 既绕本体坐标系的 x_3 轴进动，又绕着固定坐标系的 x_3' 轴（亦即 $\boldsymbol{L}$）进动。




图 6.10　$\boldsymbol{\omega}$ 在 x_1x_2 平面的投影

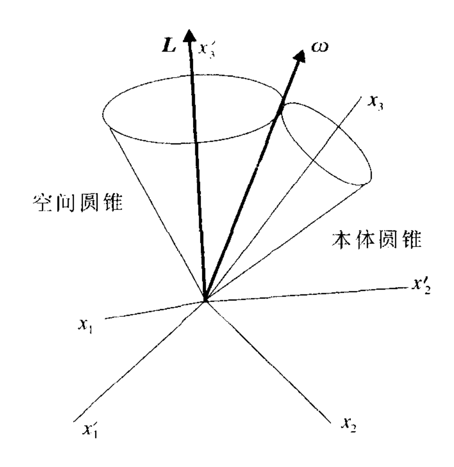


图 6.11　本体圆锥在空间圆锥上滚动

$\boldsymbol{\omega}$ 绕物体对称轴进动的角频率由式（6.10.4）给出

$$\Omega=\frac{I_3-I_{12}}{I_{12}}\omega_3$$

若 $I_{12}\approx I_3$，那么 Ω 与 ω_3 相比较就很小。地球是一个极地稍微扁平的球体，可以近似地认为 $I_{12}\approx I_3$，且 $I_3>I_{12}$。对于地球 $\Omega\approx\omega_3/300$。因地球自转的周期 $1/\omega=1$ 天，且由于 $\omega_3\approx\omega$，故地球转轴进动的周期 $1/\Omega\approx300$ 天。通常把地球自转的瞬轴（$\boldsymbol{\omega}$ 的方向）叫**天文地轴**，而把地球的对称轴（x_3' 方向）叫**地理地轴**。从上面的分析可见，天文地轴绕地理地轴转动，其周期为 300 天，即 10 个月。这种现象在天文学上叫**纬度变迁**。

由于太阳和月球的引力不能忽略，因而产生了一个不等于零的力矩，同时地球又不是绝对刚体，故上述的计算只具有近似的性质，实际观测出来的纬度变迁约 14 个月（427 天）。实际问题属于外力矩不等于零的情况，由于数学计算较繁，我们就不再讲了。

习　　题

6.1　把分子看作相互间距不变的质点系，试求以下两种情况下分子的主转动惯量：

(a) 二原子分子。它们的质量是 m_1，m_2，距离为 l。

(b) 形状为等腰三角形的三原子分子。三角形的高为 h，底边的长度为 a。底边上两个原子的质量为 m_1，顶点上的原子质量为 m_2。

[答]　(a) 取二原子的连线为 x 轴，而 y 轴与 z 轴则通过它们的质心，于是

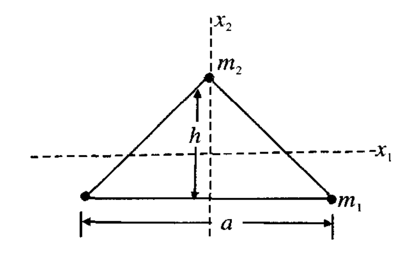
$$I_1 = 0$$

$$I_2 = I_3 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} l^2$$

(b) 若坐标轴的取法如图所示，则

$$I_1 = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} h^2, \qquad I_2 = \frac{1}{2} m_1 a^2,$$

$$I_3 = I_1 + I_2$$



题 6.1 (b) 图

6.2　如椭球方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

试求此椭球绕其三个主轴转动时的主转动惯量。设此椭球的质量为 m，并且密度 ρ 是常数。

［答］　$I_1 = \frac{1}{5} m(b^2 + c^2)$，　$I_2 = \frac{1}{5} m(c^2 + a^2)$，　$I_3 = \frac{1}{5} m(a^2 + b^2)$

6.3　试证立方体绕对角线转动时的回转半径为

$$r_c = \frac{d}{3\sqrt{2}}$$

式中，d 为对角线的长度。

6.4　半径为 R 的非均质圆球，在距中心 r 处的密度可以用下式表示

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \alpha \frac{r^2}{R^2}\right)$$

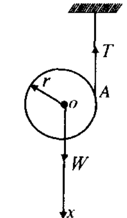
式中，ρ_0 及 α 都是常数。试求此圆球绕直径转动时的回转半径。

［答］　$r_c = \sqrt{\frac{14 - 10\alpha}{35 - 21\alpha}} R$

6.5　一个半径为 a 的均质圆盘，放在粗糙的水平桌上，绕通过其中心的铅直轴转动。开始时的角速度为 ω_0，已知圆盘与桌面的摩擦因数为 μ。问经过多少时间后盘将停止转动？

［答］　$t = \frac{3a\omega_0}{4\mu g}$

式中，g 为重力加速度。



题 6.6 图

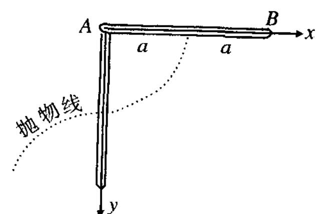
6.6　一端固接于天花板上的绳缠在一个半径为 r 的重 W 的圆盘上。求圆盘中心向下运动的加速度 a，圆盘的角加速度 β 及张力 T。

［答］　$a = \frac{2}{3} g$，　$\beta = \frac{2}{3}\frac{g}{r}$，　$T = \frac{1}{3} W$

6.7　长为 $2a$ 的均匀棒 AB，以铰链固接了 A 点，如起始时棒自水平位置无初速地开始运动，并且当棒通过铅直位置时去掉铰链使棒成自由体。试证明在此后运动中棒的质心走一抛物线轨迹，并求当棒的质心下降 h 距离后，棒一共转了几转？

［答］　$n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3h}{a}}$

式中，n 表示转数。



题 6.7 图

6.8　空心球壳和一外形相等的实心圆球沿着一斜面同时

自同一高度自由滚下，问哪一个球滚得快些？并证明经过相等距离所需的时间之比是$\frac{5}{\sqrt{21}}$。

［答］ $v_{空}=\sqrt{\frac{6}{5}gh}$，　　$v_{实}=\sqrt{\frac{10}{7}gh}$

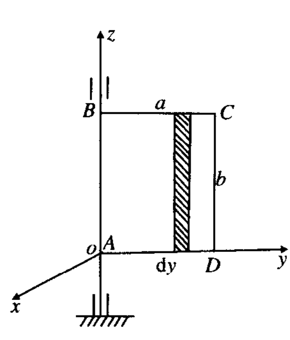
$$v_{实}>v_{空}$$

$$\frac{t_{空}}{t_{实}}=\frac{v_{实}}{v_{空}}=\frac{5}{\sqrt{21}}$$

6.9　长为 l 质量为 M 的均质棒，在铅直平面内绕距离质心为 a 的轴转动，棒在水平位置时自由放下，求它在铅直位置时的角速度。

［答］ $\omega=\sqrt{\dfrac{2ga}{\frac{1}{12}l^2+a^2}}$

6.10　矩形薄片 $ABCD$，边长为 a 和 b，重为 P，绕铅直轴 AB 以初角速度 ω_0 转动。在垂直于它的平面上受到与其面积和速度平方成正比的空气阻力，比例系数为 k。问经过多少时间后薄片的角速度减为初角速度的二分之一。



题 6.10 图

［答］　$t=\frac{4P}{3g}\left(\frac{1}{ka^2b\omega_0}\right)$

6.11　半径为 a 的球，以初速 V 及初角速度 ω 抛掷于一倾角为 α 的斜面上，使其沿着斜面向上滚动。如 $V>a\omega$，且摩擦因数 $\mu>\frac{2}{7}\tan\alpha$，试证经过$\frac{5V+2a\omega}{5g\sin\alpha}$的时候，球将停止上升。

6.12　棒的一端置于光滑水平面上，另一端则靠在光滑墙上，且棒与地面的倾角为 α。如任其自此位置开始下滑，则当棒与地面的倾角度为

$$\arcsin\left(\frac{2}{3}\sin\alpha\right)$$

时，棒与墙分离，试证明之。

6.13　试研究上题中棒与墙分离后的运动。并求棒落地时的角速度 Ω。

［答］　$\Omega=\left[\frac{3g\sin\alpha}{2l}\left(1-\frac{\sin^2\alpha}{9}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$

式中，l 为棒长的一半，即设棒长为 $2l$。

6.14　试证若一绕定点运动的刚体的角动量在任何时刻都垂直于该刚体的瞬时角加速度，则此刚体的动能为常数。

6.15　已知一刚体的惯性张量

$$I=\begin{Bmatrix}150 & 0 & -100\\ 0 & 250 & 0\\ -100 & 0 & 300\end{Bmatrix}\ (\mathrm{kg\cdot m^2})$$

质心被选作参考点，试求主转动惯量；若它以恒角速度转动，即已知 $\omega_x=10\mathrm{rad/s}$，而 $\omega_y=\omega_z=0$，求施加在物体上的总外力矩的各分量。

［答］　$I_{xx}=100\ \mathrm{kg\cdot m^2}$，　　$I_{yy}=250\ \mathrm{kg\cdot m^2}$，　　$I_{zz}=350\ \mathrm{kg\cdot m^2}$

$$N_x = 0, \qquad N_y = 10000\ \text{N·m}, \qquad N_z = 0$$

6.16 一回转仪，$I_1 = I_2 = 2I_3$，依惯性绕重心转动，并做规则进动。已知此回转仪的自转角速度为 ω_1，并知其自转轴与进动轴间的夹角为 $\theta = 60°$，求进动角速度 ω_2 的量值。

[答] $\omega_2 = 2\omega_1$

第七章 非线性力学

7.1 牛顿力学包含不确定性

牛顿力学（包括分析力学）发展至今，已有300多年的历史。长久以来，人们认为，由牛顿定律确定的运动微分方程，以及由它得出的运动规律，都是确定性的，即当初始条件给定以后，方程的解是唯一的，从而在以后任何时刻，力学系统的运动状态也就被完全确定下来。很显然，这是因为牛顿运动方程

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\boldsymbol{F}$$

当把时间 t 换成 $-t$ 时，方程并没有改变。当应用牛顿第二定律时，如果已知物体所受的力，并给定了初值（$t=t_0$），则物体过去的行为（$t<t_0$）完全被掌握，物体将来的运动（$t>t_0$）也完全被确定。

由牛顿力学所代表的这种确定论观点曾因海王星的发现而登峰造极。自1781年确认天王星之后，就发现它的实际轨道总是不规则的偏离计算结果。许多科学家都想到，这可能是由于一颗更遥远的未知行星的扰动所致。法国天文学家勒威耶（Le Virrier）运用牛顿力学精确预言了新星的位置。1846年9月23日夜德国天文学家伽勒（J. G. Galle）就在所预言的位置一举发现了这个太阳系的第八颗行星。这一大发现使得确定论的成功似乎再无异议了。

有关确定论的精彩论述当推伟大的数学家和天体力学家拉普拉斯（de Laplace）。他说："我们应当把宇宙目前的状态看作是它前续状态的结果，并且是后续状态的原因。我们暂时假定存在着一种力，它是能够理解使自然界生机盎然的全部自然力，而且能够构成自然界存在的种种状态，这个理解力广大无边，足以将所有这些资料加以分析，它在同一公式中将宇宙中最巨大物体的运动和最轻原子的运动都包罗无遗；对于这种理解力来说，没有任何事物是不确定的了；未来也如过去一样全都呈现在它的眼中。"① 因此，长期以来，牛顿力学被认为是确定性理论的典范。

拉普拉斯在他的五卷集《天体力学》巨著中，运用牛顿力学于太阳系及其卫星的轨道计算，臻于极精微的程度。拉普拉斯甚至宣称，只要给定了初始条件，就可以预言太阳系的整个未来。

---

① Laplace 著 A Philosophical Essay on Probabilities，1951.

在牛顿力学适用的范围内（运动速度远小于光速，量子效应可不计），果真事事都那么“确定”吗？

一个力学系统，若无法用已知的数学方式来表示它的运动形式，则称其为不可积系统（关于可积与不可积系统的定义7.5节有进一步的讨论）。19世纪末人们已经知道，描述三个或更多天体运动的方程组不可积分，更不能解析地求解。太阳系能否永远地稳定运行，也是悬而未决的难题。换言之，理论上准确决定了的事情，事实上还不一定能用已知的数学方法展示出来。“未知”还是现实的一部分。

在一切可能的力学系统之中，到底有多少是不可积分的？数学家西格尔（L. L. Siegel）等人在20世纪40年代已经给出了答案：不可积分的系统俯拾即是，多不胜数，而可积可解的力学问题却如凤毛麟角。传统的大学力学教科书挂一漏万，并没有描绘出牛顿力学的真面目。这也正是我们要写这一章的缘由所在。

就在确定论取得辉煌成就的同一时期，蒸汽机和内燃机的发展把对气体性质的研究提上了日程。人们使用压力、温度、体积这些宏观概念，寻求它们之间的经验规律，终于建立了热力学体系。基于大量实验事实的热力学诸定律，起着宏观世界根本大法的作用。流体力学的方程组，也是用类似的宏观变量建立的。然而，为了从大量原子分子运动和相互作用出发，推导气体的宏观性质或流体力学方程，那就必须引入这些粒子（实际上无法一一测定的）位置、速度分布的概率假设，并运用统计的方法。所以，概率性观念就成为必须的了。

被称为确定性理论的牛顿力学，它完全不同于概率性理论。对于概率性理论，给定初值只能对物体的状态做概率的描述。在状态空间里，确定性理论给出的是绝不含混的轨道；而概率性理论却描绘出状态代表点的“云”。

虽然对于同一个自然界，物理科学中有确定性和概率性两种描述，但是在牛顿创立经典力学之后250年间，直至20世纪的20年代，确定论长期处于主导地位，基于概率论的统计描述，原则上只能视为不得已情况下所采用的辅助手段而已。而且，长期以来人们以为确定论和概率论之间有不可逾越的鸿沟。

牛顿力学，或者更确切说，天体力学曾经是确定论描述的典范。热力学这类宏观描述，须借助统计概念论证，可以作为概率论描述的代表。在一定的意义上说，这是两种基本精神相反的描述。天体力学是“一一对应”的：一组确定的初值导致一条确定的轨道，它一举确定系统的过去与未来。热力学是“多一对应”的，一个平衡态对应瞬息万变的众多微观状态，它又可以是许多非平衡态的归宿，由于平衡态本身无法判断它从何而来。无穷小分析的 ϵ-δ 语言，体现在力学之中，就是只要初始条件的变动很小，轨道的改变也不应很大，否则“轨道”概念本身就不再适用（不稳定点除外。不稳定点附近不是这样，但过去以为这样的点在相空间中极

为稀少，把它们加到一起也只是体积为零的区域[①])，只要外力不变，运动方式就不会自发地产生突变。而热力学描述中可能有相变现象，这时控制参数（温度、压力等）原则上无限小的变化，就有可能使系统某些特征量出现有限的突变，甚至产生无限的尖峰等。力学方程是可逆的，热力学允许有不可逆过程，如此等等。

确定论的思想自牛顿以来根深蒂固，统治人们的思维方式成为一个时代的特征，以致对于物理学中统计描述的必要性，长期以来有两种对立的解释。一种观点把统计的必要性归结为自由度和方程数目太多，不可能完全列举出初始条件，模型中不能计及一切次要因素等外在的技术上的原因。另一种观点则强调统计规律性是复杂系统所特有的，决不能把它还原为力学规律；物质运动和结构由低级向高级发展是统计规律的后果，决不应是来自力学描述中没有计入的次要因素。

其实，这种对立在很大程度上基于传统力学教科书的观念。传统的力学教科书实际上只讲解在力学系统中稀如凤毛麟角的特例，即可积甚至可解的简单系统，而完全没有论及更典型、更普遍的不可积系统。自 20 世纪 60 年代以来越来越多的研究结果使人们已认识到，牛顿运动定律包含的“不确定行为”或称作随机行为，远多于由它所给出的“确定行为”。现在知道，只要确定论的系统稍为复杂一些（一般指具有非线性因素），它就表现出随机行为。**牛顿力学具有内在随机性。**[②] 所谓内在随机性，即不是由外界偶然干扰所产生的外随机性。虽然说作为确定论典范的牛顿力学在历史上也曾大放异彩，然而面对多姿多彩的大千世界，都显得简单。现在人们终于察觉，不是牛顿力学“无能”，而是我们对它的认识过于皮毛，没有“开发”出它的“潜力”。牛顿运动定律内在随机性的发现，才使牛顿力学得以“正名”。可以说，在牛顿力学的 300 年历史中，只是最近 30 年来人们才开始对它有了更为全面的认识。确定论和概率论描述之间并没有不可逾越的鸿沟，而是存在着由此及彼的桥梁。

7.2 线性与非线性

自牛顿建立了他的力学体系以后，许多物理学家取得成果，大多以微分方程模仿自然现象，即采取公式形式给出一种函数关系。一旦设定一种条件（初值），就会得到严密而准确的答案。但不久人们发现，数学上容易处理的问题只限于线性方程之类。19 世纪初叶，由于拉普拉斯与傅里叶在线性微分方程方面的研究

① 或称“测度为零”的区域。

② 我国数学家王梓坤认为，用决定性迭代至多只能产生伪随机数列，所以建议“混沌是决定性系统的内在随机性”改为“混沌是决定性的伪随机性”［详见王梓坤．论混沌与随机．北京师范大学学报（自然科学版），1994，30（2）：199～202］。本书仍遵从物理学界大多数学者的用语。

获得成就并得以推广，线性科学便成为一种科研传统。从此，线性在许多研究中不言而喻地被假定了，即使遇到非线性因素，也是尽量忽略不计，或从技术上做线性化处理。这种观念在传统的数学教科书中表现最为充分：非线性微分方程放在书中最后几章，按选讲内容处理，即便讲授，也只介绍如何将之化为线性问题来解决。于是乎不知不觉，一座巨大的线性理论大厦被牢固的建立起来，而且至今仍是一个活跃的研究领域。

从数学上讲，线性和非线性的区别，首先是函数 $y = f(x)$ 对自变量的依赖关系，线性函数 $y = ax + b$，画出图来是一条直线，变量间的变化率是恒量。这意味着函数的斜率在定义域内处处存在且相等，变量间的比例关系在变量的整个定义域内是对称的。其次，线性方程叠加原理成立，也就是说，一个线性方程的任何两个解加在一起构成一个新解。事实上，只要认真想想，就会认识到，叠加是用来解决任何线性问题方法的关键。例如，傅里叶变换方法和拉普拉斯变换方法都与解能够叠加有关。顺其自然，人们把问题分成许多小问题，然后把分散的解加起来，得到整个问题的解，这也就是处理线性问题的常用方法。

与线性方程相反，一个非线性方程的两个解（如果有解）不能线性相加在一起构成另一个解。叠加原理失效了，因此人们必须整个地考虑非线性问题；不能，至少不能明显地把问题分成一些小的问题而把它们的解加起来。由此，对求解典型的非线性方程不存在一般的分析方法也许就不会感到奇怪了，事实上，有些非线性方程根本就没有解析解。

另外，线性关系是互不相干的独立贡献，而非线性是相互作用的。如以 x 代表某种昆虫的数目，每个昆虫产 a 个卵，卵的总数即为 $y = ax$ 的线性关系确定。但如果 x 个昆虫因争食而咬斗，咬斗事件的数目可能与$y = x(x-1)/2$ 种组合有关，此即为非线性关系，相互作用使得整体不简单地等于部分之和。我们知道，线性系统满足叠加原理，整体等于部分之和。非线性系统不满足这一原理。这是线性系统与非线性系统二者重要区别之一。

科学技术的不断发展，日益暴露出线性关系作为考察世界单一思维方式的局限性。随着越来越多和越来越复杂的实际系统的分析、研究和控制精度要求的不断提高，原来所采用的简单线性系统模型根本无法满足人们了解事物本质的迫切要求。于是近几十年来人们一改往日的科学传统，逐渐转向和重视对复杂的非线性相互作用的研究，取得了可喜的长足进展。人们不仅发展了非线性世界中一些独有的特性（如“初值敏感”特性），而且还发现了经典的牛顿力学所蕴藏的崭新内容。这一切彻底改变了科学的面貌，使人们对世界的看法发生了根本的变化。如今人们已经充分认识到，非线性问题的出现并不是个别或局部的情况，而是无处不在，世界本质就是非线性的。正像直线是曲线的特殊情况一样，线性关系是非线性关系的特殊或者简化的情形。

我们还是从平面单摆这个经典例子开始探讨。

如图 7.1 所示，质量为 m 的球用长为 l 的细线悬挂在 O 点，在地心引力下做往复摆动，如不计悬线的质量，称为单摆，球 m 称为摆球。细线与垂线的夹角记作 θ。

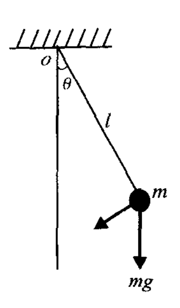


图 7.1 单摆

摆球在运动时受到重力、空气阻力和线的张力的作用。忽略空气阻力，而重力在 Om 连线上的分力与线的张力平衡，重力在与 Om 垂直方向的分力为 $mg\sin\theta$，其中 g 为重力加速度。根据牛顿定律，应有

$$ml\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}=-mg\sin\theta$$

上式中的负号是因为重力的分力指向 θ 减小的方向。从上式两边消去 m 可得

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\frac{g}{l}\sin\theta=0 \tag{7.2.1}$$

方程（7.2.1）显然是非线性微分方程，因为

$$\sin\ (\theta_1+\theta_2)\ \neq\sin\theta_1+\sin\theta_2$$

但是，如果我们研究的是小角位移的情况，利用泰勒公式将 $\sin\theta$ 展开

$$\sin\theta=\theta-\frac{1}{3!}\theta^3+\frac{1}{5!}\theta^5-\frac{1}{7!}\theta^7+\cdots$$

可见，当 θ 充分小时 $\sin\theta\approx\theta$，方程（7.2.1）近似地表示为

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\frac{g}{l}\theta=0 \tag{7.2.2}$$

这是一个二阶常系数线性微分方程。解这一类微分方程是读者所熟悉的，线性微分方程的通解是两个特解的叠加，即

$$\theta(t)=\frac{1}{\omega}\dot{\theta}_0\sin\omega t+\theta_0\cos\omega t \tag{7.2.3}$$

式中，$\dot{\theta}_0=(\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t)_0$，$\theta_0$ 和 $\dot{\theta}_0$ 是初始时刻的角位移和角速度，频率 ω 是由 $\omega=\sqrt{g/l}$ 给出的常数。

也许我们用哈密顿方法对单摆这个经典范例进行分析更为有益。以悬线和铅垂线的夹角 θ 为广义坐标，则其动能为

$$T=\frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 \tag{7.2.4}$$

以 O 点作为计算势能的参考点，势能为

$$U=-mgl\cos\theta \tag{7.2.5}$$

与广义坐标 θ 相应的广义动量为

$$p_\theta = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = ml^2 \dot{\theta} \tag{7.2.6}$$

若我们把动能 T 通过 p_θ 表示出来

$$T = \frac{1}{2ml^2} p_\theta^2 \tag{7.2.7}$$

从而哈密顿函数可写为

$$H(p_\theta, \theta) = \frac{1}{2ml^2} p_\theta^2 - mgl\cos\theta \tag{7.2.8}$$

依据哈密顿方程

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -mgl\sin\theta \tag{7.2.9}$$

上式即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(ml^2 \dot{\theta}) = -mgl\sin\theta$$

上式两边消去 m 后同样得到了

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \tag{7.2.10}$$

注意到

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]$$

和

$$\sin\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ (-\cos\theta)$$

很容易看出方程（7.2.10）可以通过乘上 $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$ 而变成一个全微分方程

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{l}\sin\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 - \frac{g}{l}\cos\theta\right] = 0$$

对上式积分得

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{g}{l}\cos\theta + c \tag{7.2.11}$$

通过比较方程（7.2.8）和（7.2.11），并考虑到式（7.2.6）中 p_θ 的定义，可以看出

$$c = \frac{H}{ml^2} \tag{7.2.12}$$

当然，常数 c 正比于哈密顿函数之值，恰好是熟悉的能量守恒表示式，并表明能量值决定了摆的运动性质。

当前我们只限于考虑摆动，即单摆的运动是来回振动而不摆过悬挂点的顶

端。我们可以用当 $\theta=\theta_{\max}$时 $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t=0$ 的条件，通过 θ 来计算 c，由此给出

$$c=-\frac{g}{l}\cos\theta_{\max} \tag{7.2.13}$$

这又意味着

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\sqrt{\frac{2g}{l}(\cos\theta-\cos\theta_{\max})} \tag{7.2.14}$$

运动的周期 T 可由如下定积分去求得

$$T=4\int_0^{\theta_{\max}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\frac{2g}{l}(\cos\theta-\cos\theta_{\max})}} \tag{7.2.15}$$

最后这个积分，可以通过三角恒等式重新定义变量，进而转换成第一类椭圆积分。尽管它不如线性近似中出现的正弦和余弦那样为人们所熟悉，但椭圆积分已制成表可供查，所以也不难计算（具体计算从略）。

7.3 外在和内在的随机性

用相图研究运动十分方便。本节首先介绍相图及其有关概念，然后通过分析非线性单摆的相图，看我们能得到些什么新鲜的知识，最后概括的小结一下相平面法。

7.3.1 相图及有关概念

有关相空间的概念在 3.3 节已经有所接触。由于非线性问题极为复杂，往往得不到解析解，相图是一种常用方法，所以有必要从更广泛的意义上进一步讨论相图及其有关概念。

前面讲过，一个系统如果其历史和未来完全由某一指定时刻的状态（称为初态）所确定，则称之为**确定性系统**。动力学系统就是要研究一个确定性系统的状态变量随时间变化的规律。

一个物理系统，就其本质而言，是一个动力学系统。在给定的时间内，系统由 s 个变量 x_1，x_2，…，x_s 的值定义，动力学行为则由 s 个常微分方程

$$\dot{x}_i=f_i(x_1,x_2,\cdots,x_s,t)\qquad(i=1,2,3,\cdots,s) \tag{7.3.1}$$

表示。这 s 个变量可表示任意的物理量，并不限定一定是力学变量，例如位置、速度、温度、浓度等。上述 s 个微分方程称为**状态方程**，变量 x_1，x_2，…，x_s 构成一个 s 维矢量，称为**状态矢量**，通常简称**态矢**。对一个物理系统，如 x_1，x_2，…，x_s 表示一个物体的位置，位置对时间 t 的导数就是该物体运动的速度。因此，含有时间、位置和运动速度的状态方程可以完全描述物体的运动。如果状

态方程（7.3.1）中的 f_i 不显含时间 t，称为**自治系统**；相反，如果 f_i 显含时间 t，称为**非自治系统**。根据运动物体位置和时间的关系，可以作出 x-t 图，也可以根据运动物体运动速度和时间的关系作出 $\dot{x}$-t 图。能否用同一张图表示运动的特性？答案是可以，办法是消去时间 t，就能合并 x-t 图和 $\dot{x}$-t 图，从而得到 x-$\dot{x}$ 图，这就是**相图**（也叫**相平面图**）。后面我们会用具体例子来说明它。

我们研究一个自治系统，该系统随时间的演化用二阶非线性微分方程描述，即

$$\ddot{x} = f(x,\dot{x}) \tag{7.3.2}$$

式中，x 表示质点的坐标，$\dot{x}$ 表示其速度，$\ddot{x}$ 为其加速度，$f(x,\dot{x})$ 是作用在质点上的力，是一个非线性函数。式（7.3.2）中的 x 和 $\dot{x}$ 表征了系统任一时刻的运动状态，称之为**相**，x-$\dot{x}$ 构成**相平面**，x 和 $\dot{x}$ 的值对应着相平面上一个点，称为**相点**。一个相点就代表系统一种状态，因而相点又称**代表点**，相点在相平面上的轨迹称为**相轨线**或**相轨迹（道）**。一组相点的运动表现为相空间的流，称为**相流**。相点的运动速度称作**相速度**（见图 7.2），它描述系统运动状态变化的快慢。相图就是相平面上的相轨线图。显然，相轨线不是系统运动的真实轨线。

令 $y=\dot{x}$，则可将式（7.3.2）这个二阶方程变换为两个一阶方程

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= f(x,y) \end{aligned}\right\} \tag{7.3.3}$$

用时间 t 作参变量，可在 x-y 平面上画出 $x(t)$ 与 $y(t)$ 的关系图是一曲线簇，这就是相轨线，它定性地描述了系统状态在全部运动时间（从 $t=-\infty$ 到 $t=+\infty$）内的变化。在相轨线上常用箭头表示时间增加的方向。

方才谈到，相点沿相轨线运动的速度即为相速度。从力学意义上看，相速度在 x 轴和 y 轴上的投影为 $\dot{x}$ 和 $\dot{y}$，则微分方程（7.3.2）对应于相速度的投影方程（7.3.3），若将此式改写成

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{f(x,y)}{y} \tag{7.3.4}$$

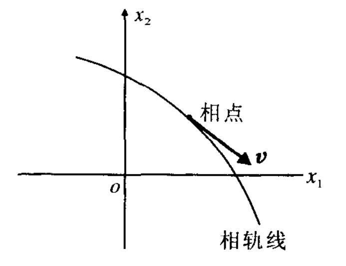


图 7.2 相速度

它表示相平面上一个方向场，也是相轨线的微分方程。求解微分方程（7.3.2），对应于求解相点在相平面上的运动方程

$$x = x(t), \qquad y = y(t)$$

即相轨线的**参量方程**，或者说，求解微分方程（7.3.2），就是求解满足式（7.3.4）的积分曲线簇和相点沿此曲线簇的运动规律。显然以上所述不包括 x 和 y 同时为零的点，即 y 和 $f(x,y)$ 同时为零的点。

式（7.3.3）的更一般形式为

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= F(x,y) \\ \dot{y} &= G(x,y) \end{aligned}\right\} \tag{7.3.5}$$

由于 F 和 G 都不显含时间 t，按前述的定义，式（7.3.5）为自治系统或自治方程。

当动力学系统的速度 $\dot{x}$ 和加速度 $\dot{y}$ 为零时，质点处于静止状态（记此时质点坐标为 x_0 和 y_0）。因此式（7.3.5）的左端为零时，方程组变为

$$\left.\begin{aligned} F(x_0,y_0) &= 0 \\ G(x_0,y_0) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{7.3.6}$$

式中，(x_0，y_0）在数学上称为**奇点**，在力学上常叫**平衡点**，即它对应于力学系统的一种平衡态。

在奇点处，方程组（7.3.5）的解是与时间 t 无关的常数 $x=x_0$，$y=y_0$，称为**定常状态解**。显然，它不能给出一条随时间变化的相轨线，也就是说，没有相轨线经过奇点。对同一系统，不同的相轨线不相交（奇点除外），即在相平面上，除奇点外的任一点处只有一条相轨线通过。这一特性是普遍的，从微分方程解的唯一性也可以理解这一点。如果某点有两条相轨线通过，则以该点为初始条件，以后就会同时出现两种运动状态，也即解不是唯一的，这不符合解的唯一性定理。

我们再次提醒读者，切勿把相轨线与质点在位形空间的真实轨线混为一谈。位形空间中一点只代表质点位置，质点速度还可以有多种（例如可在各种方向），因此，质点的真实轨线可以相交，而相轨线不能相交。

7.3.2　外在和内在的随机性

我们再回到 7.2 节讨论的单摆这个经典范例中来，若令式（7.3.1）中的 $x_1=\theta$，$x_2=p_\theta$。根据式（7.2.6）和（7.2.9），单摆的运动方程可写为

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{x_2}{ml^2} \\ \dot{x}_2 &= -mgl\sin x_1 \end{aligned}\right\}$$

上式左端均不含时间，所以单摆为自治系统。

对于小振幅的单摆运动，读者在基础物理课程中早已熟悉。对于任意大振幅条件下，单摆运动形态又是怎样的呢？为了能让单摆做大幅度运动，我们把悬挂小球的细线换成刚性细棒，细棒的质量仍然忽略不计。无须解运动方程（7.2.1），利用相图就可以给出定性的说明。式（7.2.4）和（7.2.5）分别给出了单摆的动能和势能，由机械能守恒可写出

$$E=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2-mgl\cos\theta \tag{7.3.7}$$

无量纲化后得

$$\frac{E}{mgl}=h=\frac{1}{2}\frac{l}{g}\dot{\theta}^{2}-\cos\theta \tag{7.3.8}$$

由此可得

$$\dot{\theta}=\pm\sqrt{2h\frac{g}{l}+\cos\theta} \tag{7.3.9}$$

从 θ 和$\dot{\theta}$ 的关系可见，当给定能量的各值时，易于描绘出如图 7.3 所示的相图。

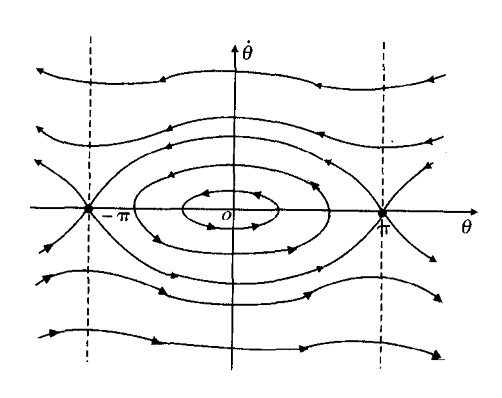


图 7.3 非线性单摆的相图

单摆的相空间由角位移 θ 和角速度$\dot{\theta}$ 构成，通常也以（θ，$\dot{\theta}$）标记。由于运动的周期性，可只考虑 $-\pi<\theta\leqslant\pi$ 的一个带。图中连接（$-\pi$，0）和（π，0）的两条分界线，把相平面分成三个区域，对应三种不同的运动类型。中间是摆动区，上下是方向相反的转动区。只要把两条分界线排除，相平面上任何一点都可以有一个邻域。取邻域中的某个点作初值，我们不仅知道它属于同一种运动类型，而且可以精确地预言它未来的轨迹。**运动对初值的不敏感性和未来轨道的可预言性，这两个互相联系的特点，是确定论描述的前提。**

然而，对于相平面上三个区域的分界线，特别是分界线的交点（$\pm\pi$，0），上述的前提就不满足了。事实上，（$\pm\pi$，0）两点对应着单摆处于其正上方时的不稳定平衡状态。根据力学方程，初值如恰好取在这一点，单摆就应永远静止在那里。但事实都不是这样，因为单摆不可能绝对孤立而存在，总会有一些微小的外界干扰。如果外界的扰动造成对初值的任何微小偏差，都会不断地增大而决定单摆未来的命运——向左侧或向右侧倒下去。也就是说，在这种情况下，仅依靠原来的力学方程是不够的，还必须计入外界环境带来的随机因素，才能对单摆运动做“完全”的描述。这种对确定论方程引入随机的初始条件或随机参数、随机外力（噪声）等等的思想，已使理论不再是确定论的了。以上所涉及的随机因

素，可称为**外（在）随机性**。

上述的外在随机性，与本章将作为重点介绍的内在随机性，至少有两点本质区别。其一，可能出现随机性的初值区域在相空间内的体积为零（在上述单摆例子中，仅限于相平面上的两条分界线及它们的交点）。其二，为了计入随机性，必须在原有方程中加入外随机项（随机参数，初始条件或外源等）。但是，我们将会看到，对于某些完全属于确定论的方程所描述的系统，根本不需要加任何随机因素即可表现出随机的行为，而且导致随机行为出现的初值范围或参数范围，在其相空间内具有非零的体积。这就是本章已经数次提及的**内在随机性**。

人们日常生活中，就可找到内在随机性现象。例如，面包师在制作面包时，要在面粉中加入一些发酵粉，再经完全重复的多次揉面动作，使发酵粉在面团中形成均匀分布。假定发酵粉不溶于水，也不发生生物、化学反应。如果我们能够设计一种办法使过程按时间顺序反过来进行。我们将会看到，即使如此，而且无论我们多么精心操作，也不可能把已经均匀分布的发酵粉重新集中到一起。因此，上述揉面过程属于不可逆过程。但当人们仔细观察发酵粉的运动过程时，又确信在每次揉面过程中，发酵粉的轨迹是完全可以预先确定的。为将此类过程简化和便于进行计算，人们设计了一种按图 7.4 所示顺序进行的 3 个基本动作不断重复的过程：首先，单位正方形 A 被压缩成一个$\frac{1}{2}\times 2$ 单位的长方形 B，然后把它重新配置为一个新的正方形 C。可以看到其中阴影区和非阴影区被分为四个隔开的区域，而不是 A 中所示的两个隔开的区域。也就是说，虽然面团依此经过 3 个基本动作后回到原来的形状，但面团中质点的位置都发生了变化。通常，将面团中质点位置的上述变化称作经过了一次**面包师变换**。显然，在经过多次面包师变换后，会把原来非常近的两个质点分开得很远。甚至可能使原来相距毫厘的两个质点达到相隔千里之遥的地步。这是一种不稳定现象，正是这种不稳定性使遵从确定论规律的系统产生了内在随机性。这种内在随机性就是现在人们通常说的**混沌**运动。

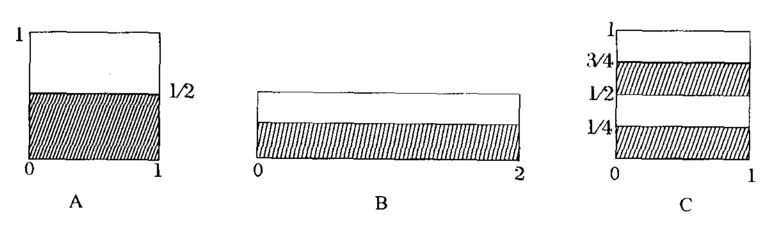


图 7.4 面包师变换

7.3.3 相平面法

为使对相轨线有清晰、完整的概念，这里以读者熟知的线性振子为例做一定性分析，以期对相平面法有个概括的了解。设一线性振子，若不计空气阻力，其运动方程为

$$\ddot{x}+\omega^2 x=0 \tag{7.3.10}$$

令 $y=\dot{x}$，则上式变成

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=y\\ \dot{y}&=-\omega^2 x\end{aligned}\right\} \tag{7.3.11}$$

或者

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\omega^2 x}{y} \tag{7.3.12}$$

分离变量后积分，可得积分曲线，为一椭圆曲线簇。但为阐述相平面法，可应用几何方法得到其积分曲线簇。

方程（7.3.12）表示相平面一个方向场，若令

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=a \tag{7.3.13}$$

则有

$$y=-\frac{\omega^2 x}{a} \tag{7.3.14}$$

对于给定的 a 值，由式（7.3.14）所确定的直线上有相同的斜率（等倾线）。给 a 以一系列的不同值，得到一系列通过相平面原点的直线，如图 7.5 所示，然后用折线法便可大致地描绘出方程（7.3.14）所确定的积分曲线，如图 7.6 所示。

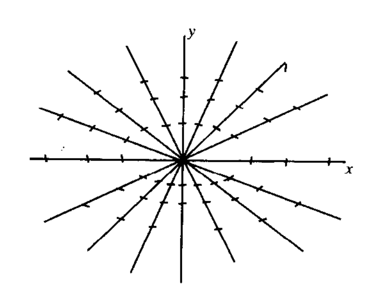


图 7.5 用等倾线法确定积分曲线

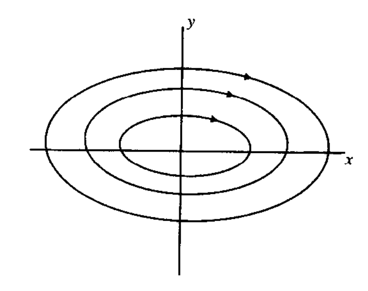


图 7.6 线性振子的积分曲线

我们再次提请读者注意，积分曲线与相轨线是不同的概念。在简单情况下（如这里的线性谐振动情况），积分曲线只含一条相轨线，二者一致，但在某些情况下积分曲线可包含几条相轨线，各条相轨线之间相互不连接。因此，系统运动

状态处在某条相轨线上，只能在这条相轨线上运动，并不能在整个积分曲线上运动。

图 7.6 表明，线性振子的相轨线为椭圆簇。相平面上任意一点都有一条且只有一条椭圆曲线通过。由于在上半平面有 $y=\dot{x}>0$，x 随时间 t 增大而增大；在下半平面有 $y=\dot{x}<0$，x 随时间 t 增大而减小，因而相点按顺时针方向运动。相轨线是封闭曲线，表明振子做周期运动。

由此例可见，虽然未求线性振子的解析解，但通过对相轨线的性状研究，对系统的振动性质和规律已有了定性的结果。于是得到如下的认识：

(1) 可以不求运动微分方程的解，应用方程（7.3.4）在相平面上所确定的方向场求出积分曲线，即求出相点沿相轨线的运动规律。这种方法具有特殊意义。对于非线性系统，在一般情况下无法求得解析解，此时借助此法可将系统的一切可能的运动都表示在相平面上，从而进行定性分析。通过对相平面以及相轨线的研究，求得相点在相轨线上的运动规律，给出系统运动性质的一个全局性图像。

(2) 由方程（7.3.4）所确定的方向场求出积分曲线，并没有对方程等号右端提出任何要求，也就是说，它对非线性系统中的非线性项没有条件要求，对于有强非线性问题同样可以适用。

最后，我们可以将相平面法概括如下：

二维欧几里得空间的微分方程，常简称为**二维系统**。二维矢量只有两个分量，所以常用两个标量表示二维系统。对于微分方程不显含时间 t 的非线性自治系统，其微分方程为

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= F(x,y)\\ \dot{y} &= G(x,y)\end{aligned}\right\} \tag{7.3.15}$$

其中，函数 $F(x,y)$ 和 $G(x,y)$ 在整个相平面上是解析的，且系统的状态与相平面上的点（x，y）保持相互单值、连续地对应。由此得到一阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{F(x,y)}{G(x,y)} \tag{7.3.16}$$

它确定相平面上的方向场，再应用适当的方法在相平面上作出方程的积分曲线，并求出相点沿此曲线族的运动规律。

7.4 平衡点的分类

在 7.3 节我们曾经提到了平衡点，即数学上的奇点，现在我们来进一步讨论这个问题。

设一单自由度自治系统的运动微分方程为

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= F(x,y)\\ \dot{y} &= G(x,y)\end{aligned}\right\} \tag{7.4.1}$$

其中，$F(x,y)$ 和 $G(x,y)$ 为 x，y 的非线性函数，且有一阶偏导数。如果有这样一点（x_0，y_0），使得

$$\left.\begin{aligned}F(x_0,y_0) &= 0\\ G(x_0,y_0) &= 0\end{aligned}\right\} \tag{7.4.2}$$

则称此点为微分方程（7.4.1）的**奇点**。反之，如果$F(x_0,y_0)$和 $G(x_0,y_0)$中至少有一个不等于零，则此点称为微分方程（7.4.1）的**常点**。

为了说明常点和奇点的意义，将方程（7.4.1）改写成

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{G(x,y)}{F(x,y)} \tag{7.4.3}$$

显而易见，在常点处，$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 有确定的值，因而过常点，微分方程（7.4.1）有唯一的解，也就是说，在常点上有一条且只有一条积分曲线通过。至于在奇点处，$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 可以有任意的值，从而过奇点可以有任意多条积分曲线（含一条也没有）。这表明，在奇点处方程（7.4.1）解的唯一性不成立。

从力学角度看

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v_x,\qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=v_y \tag{7.4.4}$$

分别是相速度在 x 轴和 y 轴上的投影，相速度的速率

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{F^2+G^2} \tag{7.4.5}$$

由此可见，在常点处，$v\neq0$，故常点表示一个运动的点，而奇点就是系统的平衡位置或平衡点。由于 $F(x,y)$ 和 $G(x,y)$ 都是非线性的，因而微分方程（7.4.1）的奇点可能有多个。

在 7.3 节我们曾经强调过相轨线与积分曲线的区别，现在我们再从微分方程的性质看看它们的区别。积分曲线上每一点的斜率 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 按式（7.4.3）计算，而相轨线是相点的轨迹，其运动规律由方程（7.4.1）确定。在常点处，积分曲线与相轨线重合，二者的区别仅表现在奇点上或过奇点的积分曲线上，因为在奇点处，式（7.4.3）不满足解的存在与唯一性条件，而方程（7.4.1）却能满足此条件。其实，奇点本身就是一条相轨线，即系统的平衡位置。对于过奇点的积分曲线必是由包括奇点在内的三条相轨线所组成。若在初瞬时相点位于通过奇点的积分曲线上，则它只能在 $t=\infty$或 $t=-\infty$时渐近地趋向奇点，而不能在有限时间内到达，否则将意味着过该点方程（7.4.1）至少有两个解，这是不可能的。

平衡点附近扰动的性质十分重要，下面研究相轨线在奇点邻域的性质。

由于物理系统中的平衡态相当于相平面中的奇点，因此可把奇点看成未被扰

动的状态。如果给系统以微小的扰动 δx 和 δy，使其离开平衡态 x_0 和 y_0，令方程（7.4.1）的解为

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + \delta x \\ y &= y_0 + \delta y \end{aligned}\right\} \tag{7.4.6}$$

将式（7.4.6）代入式（7.4.1），并将式（7.4.1）右端按泰勒级数展开至线性项，略去高次项，则得

$$\left.\begin{aligned} \delta\dot{x} &= F(x_0, y_0) + \frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y \\ \delta\dot{y} &= G(x_0, y_0) + \frac{\partial G}{\partial x}\delta x + \frac{\partial G}{\partial y}\delta y \end{aligned}\right\}$$

而在平衡点处有

$$\left.\begin{aligned} F(x_0, y_0) &= 0 \\ G(x_0, y_0) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

所以

$$\left.\begin{aligned} \delta\dot{x} &= \frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y \\ \delta\dot{y} &= \frac{\partial G}{\partial x}\delta x + \frac{\partial G}{\partial y}\delta y \end{aligned}\right\}$$

我们可将上式写为矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \delta\dot{x} \\ \delta\dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} \\ \dfrac{\partial G}{\partial x} & \dfrac{\partial G}{\partial y} \end{bmatrix}_{(x_0, y_0)} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} \tag{7.4.7}$$

式（7.4.7）是扰动量为 δx 和 δy 的线性方程组。其右端矩阵记为 J

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} \\ \dfrac{\partial G}{\partial x} & \dfrac{\partial G}{\partial y} \end{bmatrix}_{(x_0, y_0)} \tag{7.4.8}$$

式（7.4.8）称为**雅可比矩阵**。为了以后书写方便，引入下面的记号

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{\partial F}{\partial x}, & a_{12} &= \frac{\partial F}{\partial y} \\ a_{21} &= \frac{\partial G}{\partial x}, & a_{22} &= \frac{\partial G}{\partial y} \end{aligned} \tag{7.4.9}$$

线性方程组（7.4.7）的解有 $e^{\lambda t}$ 的形态，其中 λ 为雅可比矩阵 J 的**特征值**。它可以用方程（7.4.1）所描述的二维自治系统和其对应的用式（7.4.7）所描述的线性系统之间的关系来确定。

设式（7.4.7）的非零解为

$$\delta x = A\mathrm{e}^{\lambda t}, \qquad \delta y = B\mathrm{e}^{\lambda t} \tag{7.4.10}$$

将式（7.4.10）代入式（7.4.7）得

$$\begin{bmatrix} \lambda \delta x \\ \lambda \delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{(x_0, y_0)} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} \tag{7.4.11}$$

引入单位矩阵

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

方程（7.4.11）有非平凡解的条件为 λ 是下述特征值方程的解

$$|J - \lambda I| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{7.4.12}$$

根据行列式的运算，式（7.4.12）变为

$$\lambda^2 - T\lambda + \Delta = 0 \tag{7.4.13}$$

式中

$$T = a_{11} + a_{22} = \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \right)_{(x_0, y_0)} \tag{7.4.14}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ &= \left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial x} \right)_{(x_0, y_0)} \end{aligned} \tag{7.4.15}$$

显然，T 是雅可比矩阵 J 的迹，它等于两个特征值之和；Δ 是雅可比行列式的值，它等于两个特征值之积。方程（7.4.13）是个一元二次方程，其解为

$$\lambda_{1,2} = \frac{T \pm \sqrt{T^2 - 4\Delta}}{2} \tag{7.4.16}$$

根据线性方程（7.4.1）的特征根，式（7.4.16）取值不同，解和奇点（平衡点）的性质也不同，它们可以分为以下几类：

1）$\Delta < 0$

由式（7.4.16）可见，λ_1 和 λ_2 为两个正、负不相等的实根。当其为负实根时，其解趋向于平衡点，当其为正实根时，其解远离平衡点。这样的平衡点称为**鞍点**（saddle），如图 7.7 所示。显然它是不稳定奇点。

2）$\Delta > 0$，$T^2 - 4\Delta \geqslant 0$

由式（7.4.16）可见，当 $T^2 - 4\Delta > 0$ 时，两个特征根 λ_1 和 λ_2 为不相等的两实根，但二者却有相同的符号，当 $T > 0$ 时，λ_1 和 λ_2 均为正，其解按指数发展远离平衡点，称为**不稳定结点**；当 $T < 0$ 时，λ_1 和 λ_2 均为负，其解按指数衰减渐近地趋于平衡点，称为**稳定结点**，分别如图 7.8（a），（b）所示。

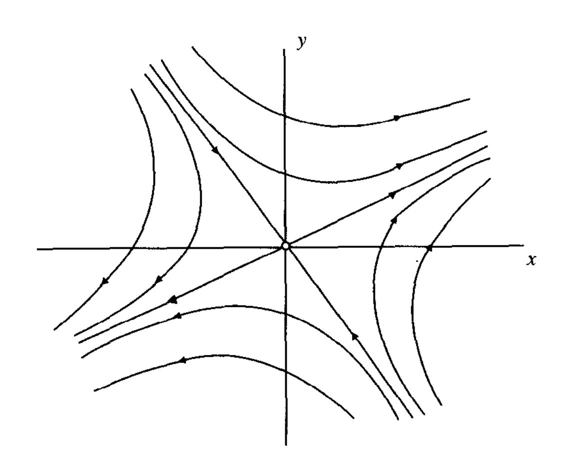


图 7.7 鞍点

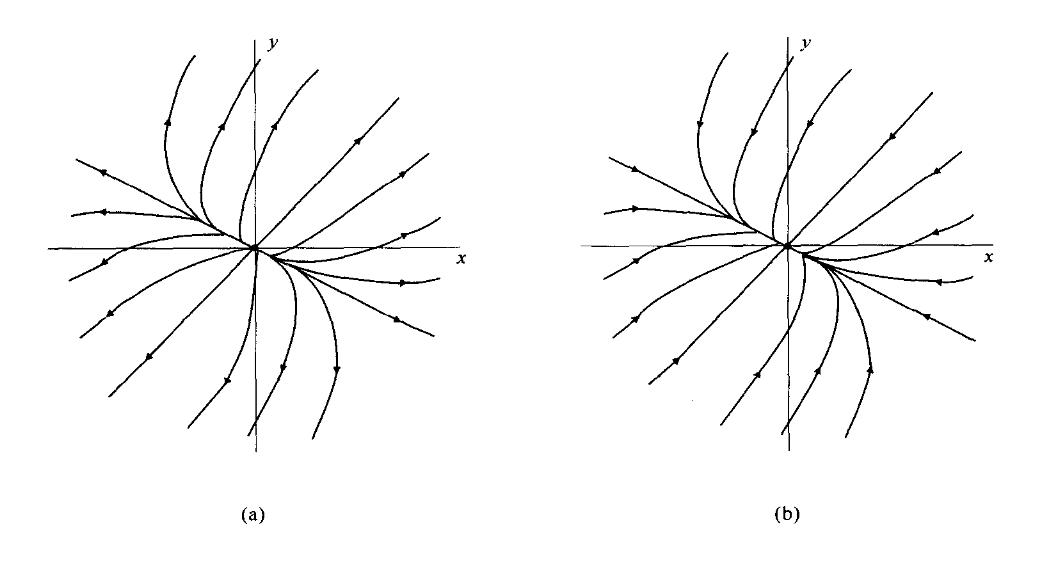


图 7.8 结点

当 $T^2-4\Delta=0$ 时，$\lambda_1=\lambda_2$ 为相等的两实根，这种情况在此我们不详加讨论，在这种情况下，$\Delta<0$ 属稳定结点，称**稳定弯结点**（stable inflected node）或**稳定临界结点**；而 $\Delta>0$ 属不稳定结点，称**不稳定弯结点**（unstable inflected node）或**不稳定临界结点**。

3）$\Delta>0$，$T^2-4\Delta<0$，但 $T\neq0$

由式（7.4.16）可见，λ_1 和 λ_2 为共轭复根，$\lambda=\mathrm{Re}\lambda\pm\mathrm{iIm}\lambda$，其解为振荡

型$e^{(\mathrm{Re}\lambda)t}\cos(\mathrm{Im}\lambda)t$。当 $T>0$ 时，其实部 $\mathrm{Re}\lambda$ 为正，可见振幅是不断增加的，称为**不稳定焦点**；当 $T<0$ 时，其实部 $\mathrm{Re}\lambda$ 为负，即振幅不断地衰减，称为**稳定焦点**，分别如图 7.9 (a)，(b) 所示。

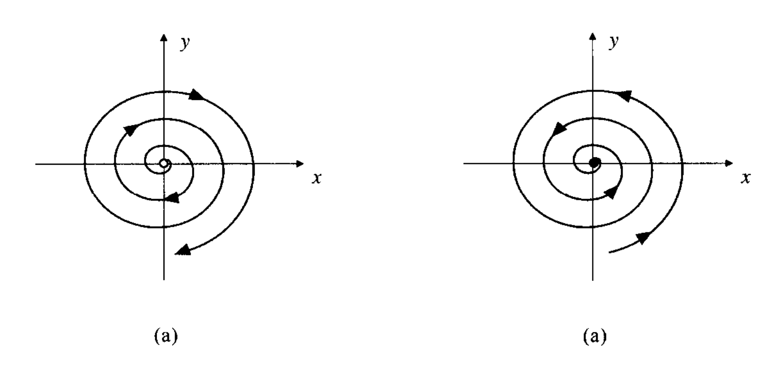


图 7.9 焦点

4) $T=0$，$T^2-4\Delta<0$

由式 (7.4.16) 可见，λ_1 和 λ_2 均为纯虚根，解为周期振荡型$\cos(\mathrm{Im}\lambda)t$，它们在相平面上的轨迹是一些封闭曲线，这时的平衡点称为**中心**，如图 7.10 所示。直观地看，由于中心点附近的解的封闭曲线并不趋于中心，因而中心点是李雅普诺夫稳定，并不是渐近稳定。

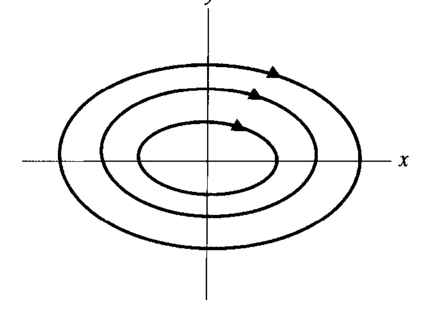


图 7.10 中心

下面罗列出了上述的各种情况：

(ⅰ) λ_1，λ_2，实数，不相等，同号；$T^2-4\Delta>0$，$\Delta>0$；结点。

(ⅱ) $\lambda_1=\lambda_2$；$T^2-4\Delta=0$，$T\neq0$；弯结点。

(ⅲ) λ_1，λ_2，复数，实部不为零；$T^2-4\Delta<0$，$T\neq0$；焦点（螺线点）。

(ⅳ) $\lambda_1\neq0$，$\lambda_2=0$，$\Delta=0$；平行线。

(ⅴ) λ_1，λ_2，实数，不同号；$\Delta<0$；鞍点。

(ⅵ) λ_1，λ_2，纯虚数；$\Delta>0$，$T=0$；中心。

二维平衡点在参考平面 (T，Δ) 上的分布情况如图 7.11 所示。

这里需要说明的是，方程 (7.4.13) 也是二阶方程

$$\ddot{x}-T\dot{x}+\Delta x=0 \tag{7.4.17}$$

所对应的特征方程。从物理上看，由于运动方程含 $\dot{x}$ 的项为阻尼项，Δx 项为恢复力项，所以，以上各种平衡态就有相应的物理意义。如鞍点为负恢复力 ($\Delta<$

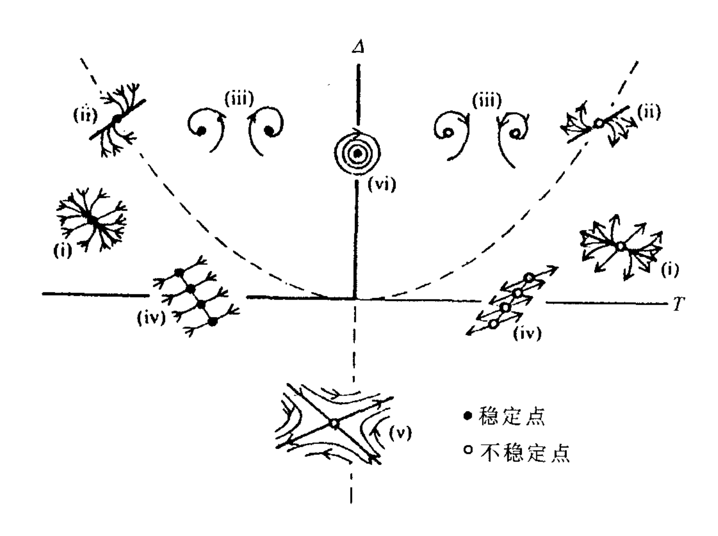


图 7.11　二维平衡点的分区

0）时的平衡态，此时正负阻尼（T 可正、可负）均不改变其不稳定的形态。而焦点为正恢复力（$\Delta>0$）的振荡加上正（$T<0$）负（$T>0$）阻力时的结果，到达焦点时振荡消失。中心点为无阻尼（$T=0$）时的简谐振动。

同样，三维自治系统也可用如下方程组来描述

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= f_1(x,y,z) \\ \dot{y} &= f_2(x,y,z) \\ \dot{z} &= f_3(x,y,z) \end{aligned}\right\} \tag{7.4.18}$$

由式（7.4.18）可见，该系统在平衡点时 $[f_1(x_0,y_0,z_0) = f_2(x_0,y_0,z_0) = f_3(x_0,y_0,z_0) = 0]$，有如下几种情形：①当式（7.4.18）右端雅可比矩阵的三个特征值的实部均为负值时，该平衡点称为**吸引子**；②当三个特征值的实部均为正值时，该平衡点称为**排斥子**；③在三个特征值中，称实部有正有负的平衡点为**鞍点**。

另外，人们把有正实部的特征值的个数称为指标，因此，吸引子的指标显然为 0；排斥子的指标为 3；鞍点的指标可为 1 或 2。

上述三维相空间中平衡点的情况及其指标如图 7.12 所示。图中分别以 R 和 I 表示特征值的实部和虚部，第一行至第四行依次排列：指标为 0 的吸引子；指标为 1 的鞍点；指标为 2 的鞍点；指标为 3 的排斥子。

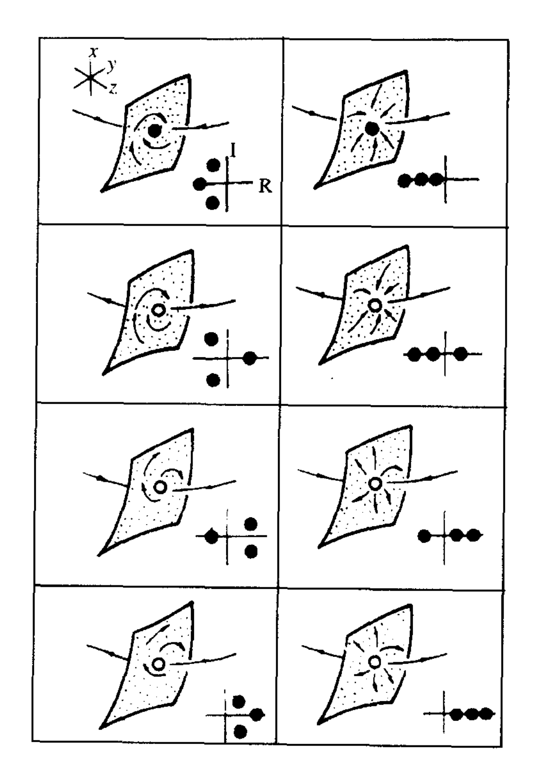


图 7.12 三维相空间的平衡点

7.5 保守系统中的随机性

7.5.1 作用-角度变量

物理系统可以分为保守系统和耗散系统两大类。根据刘维定理，保守系统的相空间体积在运动中保持不变，而耗散系统，它的相空间体积在运动中会不断地缩小，最后将趋向零。

对于一个有 s 个自由度的保守系统，其哈密顿函数是

$$H=H\ (p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_s,\ q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_s) \tag{7.5.1}$$

其运动由哈密顿正则方程

$$\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i},\qquad \dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i} \tag{7.5.2}$$

描述。如果能找到一系列正则变换，从广义动量 p_1，p_2，…，p_s 和广义坐标 q_1，q_2，…，q_s 变到另一套变量J_1，J_2，…，J_s 和θ_1，θ_2，…，θ_s，使得用新变

量表示的哈密顿函数只依赖于前一半变量 J_i，而与 θ_i 无关，即有

$$H=\mathscr{H}(J_1, J_2, \cdots, J_s) \tag{7.5.3}$$

则相应的哈密顿方程为

$$\left.\begin{aligned}\dot{\theta}&=\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial J_i}=\omega_i(J_1,J_2,\cdots,J_s)\\ \dot{J}&=-\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \theta_i}=0\end{aligned}\right\} \tag{7.5.4}$$

由于 ω_i 是与 θ_i 无关的函数，以上方程很容易积分出来

$$\left.\begin{aligned}\theta_i(t) &= \omega_i t + \theta_i(0)\\ J_i &= J_i(0)\end{aligned}\right\} \tag{7.5.5}$$

至此，这个力学系统的运动方程就完全解出来了。式（7.5.5）中由初始条件决定的常数 $\theta_i(0)$ 和 $J_i(0)$ 共有 $2s$ 个，它们将通过原先的广义坐标和广义动量来表示，是一些**运动不变量**。J_i 和 θ_i 称为**作用-角度变量**。通常称满足式（7.5.3）或（7.5.4）的系统为**可积系统**，否则即称为**不可积系统**。由式（7.5.5）可知，可积系统有 s 个运动积分 J_i。事实上，只要知道了 s 个适当的运动积分，运动方程的解就可以通过积分表示出来，这样的系统也是可积的。因此可积系统的运动总是确定的。

对于物理学中一类十分重要的做周期运动的系统，人们关心的不是运动轨道的细节而是频率。应用作用-角度变量的优越性在于它能不必求系统运动的完全解便可以得到周期运动的频率。

作为例子，考虑 s 维无耦合线性谐振子，此时

$$H = \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{2}(p_i^{\,2} + \omega_i^2 q_i^2) \tag{7.5.6}$$

做正则变换

$$\left.\begin{aligned}J_i&=\frac{1}{2\omega_i}(p_i^2+\omega_i^2 q_i^2)\\ \theta_i&=\arccos\left(\sqrt{\frac{\omega_i}{2J_i}}q_i\right)\end{aligned}\right\} \tag{7.5.7}$$

其逆变换为

$$\left.\begin{aligned}q_i&=\sqrt{\frac{2J_i}{\omega_i}}\cos\theta_i\\ p_i&=-(2\omega_i J_i-2\omega_i J_i\cos\theta_i)^{\frac{1}{2}}=-\sqrt{2\omega_i J_i}\sin\theta_i\end{aligned}\right\} \tag{7.5.8}$$

于是

$$\mathscr{H} = \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{2}(p_i^2 + \omega_i^2 q_i^2) = \sum_{i=1}^{s} \omega_i J_i \tag{7.5.9}$$

将式（7.5.9）代入式（7.5.4）得

$$\left.\begin{aligned}\dot{\theta} &= \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial J_i} = \omega_i \\ \dot{J}_i &= -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \theta_i} = 0\end{aligned}\right\} \tag{7.5.10}$$

所以

$$\left.\begin{aligned}\theta_i &= \omega_i t + \theta_i(0) \\ J_i &= J_i(0)\end{aligned}\right\} \tag{7.5.11}$$

可见，谐振子是可积系统。当 $s=1$ 时，这就是大家熟知的一维线性谐振子，其运动在相空间（p，q）的轨迹为椭圆。当 $s>1$ 时，在 $2s$ 维相空间的运动轨迹是 s 维超椭球面。做适当坐标变换（如令 $\theta_i=\sqrt{\frac{\omega_i}{2}}q_i$，$P_i=\sqrt{\frac{1}{2\omega_i}}p_i$），则这些椭圆和超椭球分别退化为圆和超球面。

对于一般的可积系统，只要其运动是有界的，它也一定是周期的，因此通常也称角度变量 θ_i 为**循环坐标**，ω_i 便是周期运动的频率。

从前述可知，根据是否满足式（7.5.4）或（7.5.3）把物理系统分为可积与不可积系统。其实，根本困难还在于如何找到所需要的正则变换或运动积分。如果从一切可能的解析的哈密顿函数中任取一个，它几乎一定是不可积的（只要 $s\geqslant 2$）。可积的哈密顿函数是如此稀少，以至于用它们来逼近一个不可积系统也是办不到的。

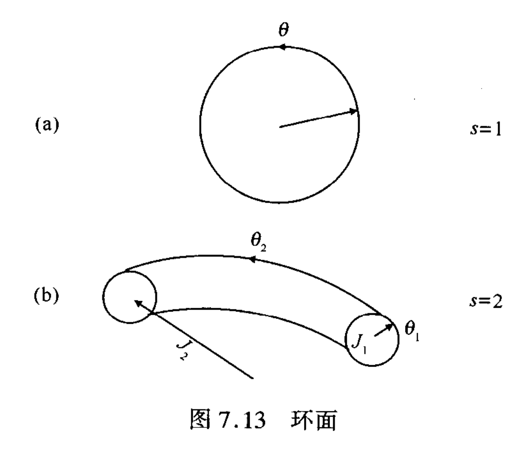


图 7.13 环面

若可积系统的运动对于一切广义坐标都是有界的时，各种力学量只能是角度变量的周期函数。这时系统在相空间的运动将被限制在 s 维的环面上，$J_i=J_i(0)$是环面的各个半径，而 θ_i 描述在环面上的绕动。由于高维环面难于直观地

绘出，我们在此仅把 $s=1$ 和 $s=2$ 的情形图示在 7.13 中。只要 $s\geqslant 2$，则由 J_i 所决定的 s 维环面就只能是 $2s-1$ 维等能面的一部分。换句话说，等能面上还有大片大片的区域是系统根本达不到的地方。

7.5.2 近可积系统的 KAM 定理

如果不可积系统的哈密顿函数可以分出一项小扰动 H_1

$$H=H_0+H_1 \tag{7.5.12}$$

而当 $H_1=0$ 时，$H=H_0$ 是可积的，即可变换到作用-角度变量 J_i，θ_i，求得 s 个频率 $\omega_i=\omega_i(J_1,\ J_2,\ \cdots,\ J_s)$，还可得到运动限制在环面上等结论。而当 $H_1\neq 0$ 时，则称 H 是**近可积的**。那么对于近可积的哈密顿系统，运动的图像如何呢？有一条著名定理给出了这个问题的答案，它是由柯尔莫哥洛夫（A. N. Kolmogorov）在 1954 年提出，在 20 世纪 60 年代初由阿诺尔德（A.I.Anold）和莫塞（J.Moser）分别加以证明的，因而称为 KAM **定理**，是 20 世纪科学的重大成就之一。由于证明所需要的数学知识超出多数物理工作者的一般水准，但是其结论和图像是清楚易懂的，在此我们也就限于表述定理的大意，然后讨论其物理后果。

KAM 定理指出，在下述两个条件下，即

（1）哈密顿函数中导致不可积性的扰动项 H_1 很小；

（2）未扰动的哈密顿函数 H_0 对应的频率满足不相关（或非共振）条件，即可积的 H_0 的 s 个频率 ω_i 的雅可比项列式不等于零

$$\frac{\partial\ (\omega_1,\ \omega_2,\ \cdots,\ \omega_s)}{\partial\ (J_1,\ J_2,\ \cdots,\ J_s)}\neq 0 \tag{7.5.13}$$

则哈密顿函数 $H=H_0+H_1$ 的绝大多数解（除去测度为零的集合）仍然留在 s 维环面上，这些环面的形状比起 $H_1=0$ 时可能略有改变，但运动的总体图像与未扰动的可积系统是相同的。

从该定理我们看到，两个条件中任何一个受到破坏，都会出现随机的运动。

进一步的分析研究表明，对于保守系统，除了可积系统和满足 KAM 条件的近可积系统外，在 KAM 定理条件不满足的情形下，系统的运动将是随机的混沌运动，而且也会出现无穷层次的自相似结果。

保守的不可积系统的特点是，相空间内导致不稳定运动的点不必都是少数测度为零的例外情形，而可能占据有限测度的区域。

KAM 定理是 20 世纪科学重大发现之一，它在某些方面完全改变了人们过去长期以来普遍公认是理所当然的观念。例如，KAM 定理对统计力学中人们习以为常的假设提出了警告。统计力学常以没有相互作用的理想系统出发，指出虽然理想系统不会趋近平衡，但只要计入无限小的相互作用，系统就会达到平衡。

然而 KAM 定理告诉我们：即使有很弱的相互作用，系统的运动可能仍限制在 s 维环面上，与理想系统的情况很接近。因此不可能在 $2s-1$ 维等能面上求平均（除非 $s<2$），也就是说统计物理学中的微正则系综的假设并不成立。

7.6 耗散系统中的随机性

这一节涉及的内容较多。首先给出耗散系统一个可以量化操作的定义。非线性问题极为复杂，直接观察相空间或相平面中的轨线固然不失为一有效方法，但运动很复杂时，轨线可能混乱成一片，甚至可能充满某一区域而看不出什么规律，因而必须寻求其他有效方法。这些方法常用的有数种，我们这里只介绍一种所谓庞加莱截面法。有了这些准备之后，我们讨论通向混沌运动一个典型范例。

7.6.1 耗散系统

任何一个实际系统，当运动时间足够长时，耗散效应都是不可忽略的。而任何一个宏观系统都是耗散系统。因此，对耗散系统中随机性的研究有重要的实际意义。

下面我们首先来介绍一个在非线性动力学发展史上写下光辉一页的大气这个耗散系统产生混沌运动的实例。

1963 年美国气象学家洛伦茨（E. N. Lorenz）在他著名的论文《确定论非周期流（deterministic nonperiodic flow)》中讨论了天气预报的困难和大气湍流现象，指出气候不能精确重演与长期天气预报无能为力之间必然存在着一种联系，这就是非周期性与不可预见性之间的联系。他将非常复杂的大气运动经过简化，给出了三个变量的自治方程，这就是著名的**洛伦茨方程**

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -\sigma(x-y) \\ \dot{y} &= -xz+\gamma x-y \\ \dot{z} &= xy-bz \end{aligned}\right\} \tag{7.6.1}$$

式中，x 称为速度模，y 称为温度模，z 称为温度梯度模。方程右端不显含时间，它是一个完全确定的常微分方程组。方程中三个参数为 σ，γ 和 b，如取 $b=8/3$，$\sigma=10$，改变参数 γ：当 $\gamma<1$ 时，其解的性质趋于无对流的定态；当 $\gamma>1$ 时，其解为非周期的，看起来似乎非常混乱。这便是在耗散系统中，一个确定性方程却能导出混沌解的第一个实例，从而揭开了对混沌现象深入研究的序幕。

在 7.4 节中提到的吸引子，实际上是系统（7.4.18）中的一个特殊的平衡态，它存在于耗散系统中。通常人们把与外界有物质和能量交换的开放且远离平衡态的这种系统称之为**耗散系统**。下面考虑由 s 个一阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=f_i(x_1,x_2,\cdots,x_s) \qquad (i=1,2,\cdots,s) \tag{7.6.2a}$$

描述的运动，为书写方便，上式我们也经常简写为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f}(x) \tag{7.6.2b}$$

式中，$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_s)$，$f(\boldsymbol{x})$ 不显含时间 t。

保守系统的相空间体积在运动中保持不变，因而不存在吸引子。而耗散系统则不同，其相空间体积在运动过程中要不断收缩，最后趋于零，也就是说相空间体积元 $\mathrm{d}v=\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_s$ 的变化率应满足

$$\frac{1}{(\mathrm{d}v)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{d}v)=\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial f_i(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}<0 \tag{7.6.3}$$

式（7.6.3）也可以看作是耗散系统的定义。通常式（7.6.3）不一定在相空间的每一点都成立，只要 $\sum_{i}^{s}\partial f_i/\partial x_i$ 对相空间有关区域的体积积分小于零即可。于是式（7.6.3）的特殊情况可表为

$$\sum_{i}^{s}\frac{\partial f_i(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}=\text{常数}<0 \tag{7.6.4}$$

例如，对于洛伦茨方程，由式（7.6.4）可得

$$\sum_{i}^{s}\frac{\partial f_i(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}=-(\sigma+b+1)<0 \qquad (\sigma>0,b>0) \tag{7.6.5}$$

式（7.6.5）表明，运动相轨线最后被吸引到一个有限的相空间去，这就是吸引子。上面我们通过一个具体实例说明什么是吸引子。更概括一些说，对于耗散系统，相空间中的体积在运动过程中会不断收缩，不同的初始条件会趋向同一结果或少数几个不同结果。耗散系统相空间中这样的极限集合称为吸引子。

我们再举一个耗散系统运动微分方程的例子。通常一个单自由度非线性耗散系统的运动微分方程可以表示为

$$\ddot{x}+g(x,\dot{x})+f(x)=0 \tag{7.6.6}$$

其中，$g(x,\dot{x})$ 满足下述条件

$$\left.\begin{aligned} &g(x,\dot{x})=0 \qquad (\text{当 } \dot{x}=0 \text{ 时})\\ &\dot{x}g(x,\dot{x})>0 \qquad (\text{当 } \dot{x}\neq 0 \text{ 时})\end{aligned}\right\} \tag{7.6.7}$$

条件式（7.6.7）的力学意义为：阻尼力恒与速度方向相反。运动微分方程（7.6.6）的阻尼项 $g(x,\dot{x})$ 满足条件式（7.6.7）表明，系统的能量是单调递减的，因而它描述的系统是一个耗散系统。这个结论可证明如下：若将方程（7.6.6）中的各项乘以 $\mathrm{d}x=\dot{x}\mathrm{d}t$，则有

$$\ddot{x}\dot{x}\mathrm{d}t+g(x,\dot{x})\dot{x}\mathrm{d}t+f(x)\mathrm{d}x=0$$

对上式积分，得

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 + U(x) = h - \int_0^t g(x,\dot{x})\dot{x}\mathrm{d}t \tag{7.6.8}$$

式中

$$U(x) = \int_0^x f(x)\mathrm{d}x \tag{7.6.9}$$

h 为系统的初能量。由式（7.6.7）知，$\int_0^t g(x,\dot{x})\dot{x}\mathrm{d}t$ 是单增正值函数，因而式（7.6.8）表明，系统的能量随时间的增加而减少。如果将式（7.6.8）两端对时间 t 求微商，并注意到 $\dot{x}g(x,\dot{x}) > 0$，那么上述结论就更明显。事实上此时有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}\dot{x}^2 + U(x)\right] = -g(x,\dot{x})\dot{x} < 0 \tag{7.6.10}$$

这清楚地表明，系统的能量为时间的单减函数，故方程（7.6.6）所描述的系统就是耗散系统。

耗散系统相空间体积会不断地缩小，最后趋于零。这一点可借助图 7.14 直观地加以说明。以二维情形为例，在图中的相平面内取边长分别为 Δx 和 $\Delta\dot{x}$ 的矩形，经 $\mathrm{d}t$ 时间后它移动到新的位置，图中以虚线表示。此矩形左右一对竖边横向移动的速度 $\dot{x}$ 不依赖于空间坐标 x，故两者之间的间隔（矩形的横边长）Δx 不变。然而，若 F 为耗散力，比如它与速度 $\dot{x}$ 有关，则矩形上下两横边移动的速度 $\ddot{x} = F/m$ 将不同，它们分别为

$$(\ddot{x})_{1,2} = F\left(x,\dot{x} \pm \frac{\Delta\dot{x}}{2}\right)/m$$

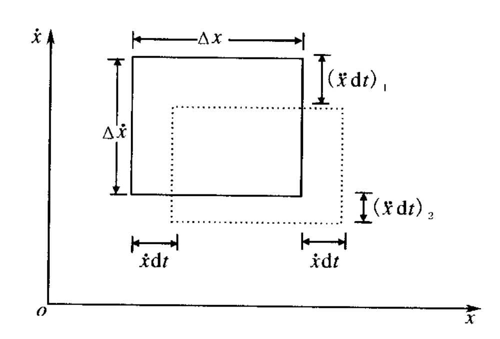


图 7.14 耗散系统的相空间体积演化示意图

两者之差是间距 $\Delta\dot{x}$ 的时间变化率

$$\frac{\mathrm{d}\Delta\dot{x}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{m}\left[F\left(x,\dot{x}+\frac{\Delta\dot{x}}{2}\right) - F\left(x,\dot{x}-\frac{\Delta\dot{x}}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{m} \frac{\partial F(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}} \Delta \dot{x} \tag{7.6.11}$$

于是得到相元面积 $\Delta\tau$ 的时间变化率为

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\Delta\tau}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta x \cdot \Delta \dot{x}) = \Delta x \cdot \frac{\mathrm{d}\Delta \dot{x}}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{1}{m} \frac{\partial F(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}} \Delta x \Delta \dot{x} \\ &= \frac{1}{m} \frac{\partial F(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}} \Delta \tau \end{aligned} \tag{7.6.12}$$

以线性摩擦力为例，因为线性摩擦力

$$F = -\mu \dot{x} \tag{7.6.13}$$

式中，μ 为阻尼系数，而 F 对 $\dot{x}$ 的偏微商

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = -\mu$$

将上式代入式（7.6.12）得

$$\frac{\mathrm{d}\Delta\tau}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mu}{m} \Delta\tau$$

上式经分离变量可写为

$$\frac{\mathrm{d}\Delta\tau}{\Delta\tau} = -\frac{\mu}{m} \mathrm{d}t$$

积分此式得

$$\Delta\tau = (\Delta\tau)_{t=0} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\mu}{m}t} \tag{7.6.14}$$

由此我们看到，一切与速度无关的力（如保守力、驱动力等），都不会影响相元面积。显然，这一结论对于维数更高的相空间也完全适用。

7.6.2　庞加莱截面

在 7.3 节我们曾介绍过通过相空间的几何直观方法来描述动力学系统的各种状态，利用相图的方法可以把复杂运动简化。但是对有些复杂运动，研究其相轨道时往往是极其困难的。例如，有些倍周期运动的倍数是很高的，相轨道看起来可能很乱，很难与非周期运动相区别，这时就可用庞加莱截面的方法来研究。它不仅很容易区分周期和非周期运动，而且也能清楚地反映出动力系统在庞加莱截面上的相应结构。

前面我们曾考虑一个由 s 个一阶微分方程（7.6.2a）描述的运动。基于上述对有些复杂运动在研究相轨道时的困难，代替式（7.6.2a），也可以用映象的方法来研究系统的运动。人们最常用的是**庞加莱映象**。在相空间中取一适当的 $s-1$ 维超平面（自然，该超平截面的选取要有利于观察系统的特征和变化，如截面不能与相轨线相切，更不能包含相轨线面等），在此截面上某一共轭变量如 x_1 和

$\dot{x}_1$ 取固定值，通常称此超平面为**庞加莱截面**。当轨道按给定的演化方向通过庞加莱截面时，在截面上将相应的交点记录下来，从而得到第 $n+1$ 次交点 x_{n+1} 与第 n 次交点 x_n，它们之间应存在如下关系

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

上式为 $s-1$ 个函数关系。

由上述可见，这种方法实质上是将动力学系统问题化成其相轨迹与一个横截面（庞加莱截面）的交点来研究，从而可以在庞加莱截面上观察到系统形态随时间的演化。图 7.15 给出了这种方法的示意图，由图看出，三维空间的轨线以一定的演化方向（$z<0$）与 $z=$ 常数的横截面 S 依次相交于 P_0，P_1，P_2，…点，这些离散点形成了一个庞加莱映射

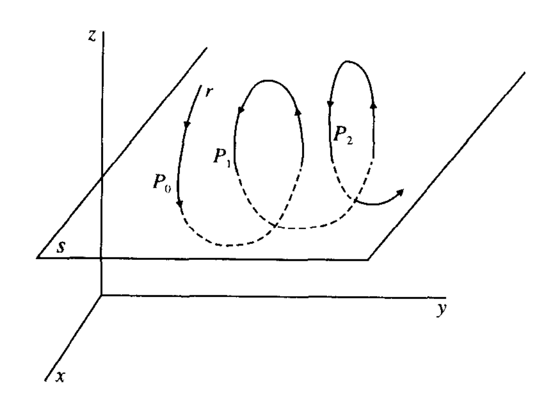


图 7.15 庞加莱截面的示意图

$$P_{n+1} = TP_n = T(TP_{n-1}) = T^2P_{n-1} = \cdots = T^{n+1}P_0 \tag{7.6.15}$$

这样，就将原动力学系统所确定的随时间的连续运动转变为在庞加莱截面上的离散映射。由于庞加莱截面将空间的维数（或坐标）减少一个，其映射 T 又是差分方程，容易求解，且将必要的资料量大大减少（即留在庞加莱截面上的点与原轨道上所有的点相比较则大大地减少了）。因此，庞加莱截面法广泛地应用于非线性动力学的研究中。利用庞加莱截面法，可以抛开相空间的轨道，借助计算机画出与庞加莱截面上的交点（称为庞加莱点），从而得到关于运动特性的信息：

当庞加莱截面上只是一不动点或少数离散点时，运动是周期性的；

当庞加莱截面上是一闭曲线时，运动是准周期的；

当庞加莱截面上是一些成片的密集点时，运动便是混沌。

需要说明，以上指的是庞加莱截面上的稳定图像，没有考虑初始阶段的暂态过程。如果考虑暂态过程，稳定的定态可以是一系列离散的庞加莱点，最后才变成一个不动点。

7.6.3　混沌

一个耗散系统的混沌行为往往可用一个一维映象表示出来。例如，洛伦茨模型本来描述一种三维流，采用庞加莱映象技术可以把它化成一个二维问题。如果只研究庞加莱映象不变曲线上的运动，又可进一步约化为一维问题。

由于高维耗散系统的相空间体积在演化过程中不断收缩，其结果是在很多庞加莱截面中观察到很接近一维映象。有关高维系统的实验观测与数值计算也总是重新发现与证实了一维映象的研究结果，从而可以认为耗散系统混沌运动的基本特征，一般来说也都蕴含于一维映象之中。因此，一维映象对于耗散系统的研究有重要意义。

一维映象的研究至少已有 80 年的历史，然而它们的丰富内容却是最近 20 多年才揭示出来的。当前无论是理论上还是实验上研究内在随机性，都把一维映象作为原型。

根据问题的需要，人们设计出各种各样的一维映象，它们以时间离散的方式反映时间连续的动力系统的运动。在各种一维映象中，最有典型意义的模型是**逻辑斯谛映象**（logistic map），即人们通常所说的："虫口模型"。这是一个生态学模型，可称之为广义动力学模型。由于非线性问题的研究是极其困难的，直至目前，尚无完全系统的类似于傅里叶变换那样的处理方法，更多的是集中于典型范例的研究和做某些定量分析就不足为怪了。

假定有某种昆虫，在一个有限的环境中生息繁衍，每年夏季成虫产卵后全部死亡，第 2 年春天每个虫卵化成一只虫子，其间没有代际交叠。设第 n 年的虫口数目为 x_n，每只成虫平均产卵 a 个，这样年复一年地重复下去，一般规律可以写成

$$x_{n+1} = ax_n \tag{7.6.16}$$

这是一个线性差分方程。容易求得

$$x_n = x_0 a^n \tag{7.6.17}$$

其中，x_0 是起始年度的虫口数目，我们看到，只要 $a>1$，即只要每只虫子平均产卵数多于 1 个，虫口数目就会按指数上升，用不了许多年，整个地球就要虫满为患。相反，如果 $a<1$，则意味着虫口数目按指数规律减少，最终当 $n\to\infty$ 时，$x_n\to 0$，于是这种昆虫就会在若干年后灭绝。

为使读者对叙述中所用到的一些数学术语易于理解，加深印象，对式 (7.6.17) 所描述的模式从比较数学化的观点重复上面的讨论。x_0 是个任意数，特别是当 $x_0=0$ 时是映射中一个**不动点**，也就是其轨道为 $x_n = x_0$，且与 n 无关。当 $|a|>1$ 时，式 (7.6.17) 的 x_n 按指数规律增长；当 $|a|<1$ 时，x_n 按指数规律减少，最终当 $n\to\infty$ 时，$x_n\to 0$，这意味着轨道被引向不动点 $x_0=0$。我

们称这样的 x_0 为当 $-1<a<1$ 时的**吸引子**。很明显，不动点是稳定的，因为从略微偏离不动点的某处出发，任何轨道都会逐渐接近于它。对于 $|a|>1$ 的情况，运动轨道永远是发散的。在这种情况下，不动点是不稳定的，称这样的点为**排斥子**，不管轨道的初始点如何接近排斥子，经过足够长的时间，轨道总会远离。

吸引子的基本特征是对初始条件不敏感。从吸引子附近的任何初始条件开始，运动轨道都要汇拢到该吸引子。

为了把这个模型修正得更符合实际一些，我们想一下在走向虫满为患的过程中会发生什么事情。第一，食物和空间有限，虫子们为争夺生存条件而咬斗；其次，虫子多了，传染病会因为接触增加而蔓延。这里还完全没有考虑虫口增加有利于天敌繁殖的多物种竞争问题。我们知道，x_n 只虫子配对事件的总数是 $x_n(x_n-1)/2$。而当 $x_n \gg 1$ 时，这基本上是 x_n^2。上面两类事件都会造成减员，即对下一代虫口数作出负贡献。因此，修正后的虫口方程是

$$x_{n+1}=ax_n-bx_n^2 \tag{7.6.18}$$

这是一个非线性差分方程，通常称为**逻辑斯谛映象**（logistic map，logistic 来自法文 logistigue，意为部队宿营地）。除了一些特殊的参量值以外，它的解并不容易给出来。于是，人们不得不靠计算机进行数值研究。这个模型看起来似乎很简单，但它具有极其复杂的动力学行为。

在此特别需要指出，方程（7.6.18）不只是一个描述虫口变化的模型。它同时考虑了鼓励和抑制两种因素，反映出“过犹不及”的效应，具有更普遍的意义和用途。

重新定义一下变量和参数，或者说，适当选择坐标，可以把式（7.6.18）写成其他等价形式，常见的标准写法有

$$x_{n+1}=\lambda x_n(1-x_n),\qquad \lambda\in(0,4),\qquad x_n\in[0,1] \tag{7.6.18a}$$

或者

$$x_{n+1}=1-\mu x_n^2,\qquad \mu\in(0,2)\qquad x_n\in[-1,1] \tag{7.6.18b}$$

或者

$$x_{n+1}=\mu-x_n^2,\qquad \mu\in(0,2),\qquad x_n\in[-\mu,\mu] \tag{7.6.18c}$$

后两种写法的参量相同，只是变量区间不同。第一种写法，仅在参量很小时与后两种写法有点细微差别。

上述演化方程如写成一般形式即为

$$x_{n+1}=f(\lambda,x_n) \tag{7.6.19}$$

这是一个离散化的时间演化方程，是一个有限差分方程，通常称为**逻辑斯谛方程**（logistic equation）。其中 f 是一个非线性函数，λ 代表一个或多个参量。在有限差分方程中，一旦选中初始条件 x_0，代入上式右端，即得其左端的 x_1；再把 x_1

作为新的变量代入右端，计算又得左端的 x_2；如此等等，重复上过程

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= f(\lambda, x_0) \\ x_2 &= f(\lambda, x_1) \\ x_3 &= f(\lambda, x_2) \end{aligned}\right\} \tag{7.6.20}$$

得出一条轨道

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_i,\ x_{i+1},\ \cdots \tag{7.6.21}$$

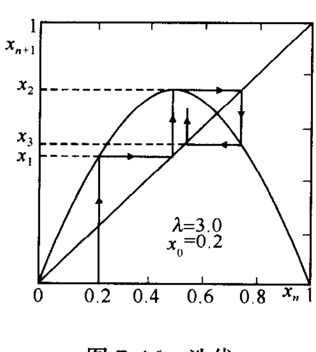


图 7.16 迭代

其中，每个 x_i 是一个轨道点。由 x_n 值确定 x_{n+1} 值的过程叫做**迭代**。所以式（7.6.19）就是一种**迭代方程**。有限差分方程的迭代可用图示方法或数值方法来进行。图 7.16 就是这种迭代过程的图示，其中的抛物线代表式（7.6.19）右端的迭代函数。为了把每一次迭代过程的结果变成下一次的输入量，可以在图中作 x_n 轴与 x_{n+1} 轴的角平分线，显然该角平分线代表 $x_{n+1}=x_n$ 的关系。所以，通常称该角平分线为**恒等线**。下面我们用迭代方法具体计算映射（7.6.18a）。先给定控制参数 λ 值，例如 $\lambda=3.0$，再给定初值 x_0，例如 $x_0=0.2$。第一步从横坐标 $x_0=0.2$ 处作横轴的垂线与抛物线相交。这点的纵坐标高度即为 x_1。第二步从此点作水平线与对角线相交，此交点的横坐标即为 x_1。第三步再由此点又作竖直线，得到与抛物线相交的高度为 x_2。再将 x_2 移植到对角线上，找到横坐标 x_2。再从这里作横轴垂线与抛物线相交得 x_3。如此重复这一过程，得到 x_n（$n=1, 2, 3, \cdots$）序列。熟悉了图解方法之后，可以只在恒等线与映射函数之间不断作直线实现迭代。

当然我们主要关心的还是轨道式（7.6.21）的长时间行为，即迭代次数 i 超过某个足够大的 s 以后，极限集合 $\{x_i\}_{i>s}^{\infty}$ 表现出的那些稳恒行为。下面仅就几种重要的可能性进行简单的讨论。

1. 不动点

从某次迭代开始，所有的 x_i 都不再变化

$$x_i = x^*, \qquad \forall_i \geqslant s \tag{7.6.22}$$

逻辑记号"∀"读作"对于所有"，"$\forall_i$"读作对于所有的 i，x^* 称为映射式（7.6.20）的**不动点**。一个映射的不动点就是第 i 次迭代的数值与第 $i+1$ 次迭代值相同的数值，它不再因继续迭代而发生变化。对于平方映射式（7.6.18a），按不动点的定义有

$$x_i = \lambda x_i(1 - x_i)$$

或

$$x_i(\lambda - \lambda x_i - 1) = 0$$

于是得根

$$x_i = \begin{cases} 0 \\ \dfrac{\lambda - 1}{\lambda} \end{cases} \tag{7.6.23}$$

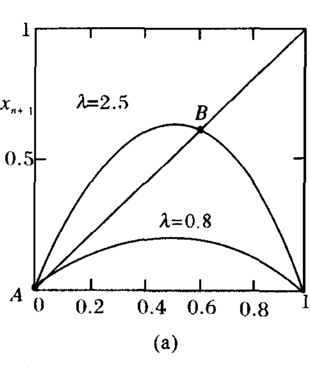
这里，$x_i = 0$ 与 $x_i = \dfrac{\lambda - 1}{\lambda}$ 即为其不动点。

用作图的方法同样可以得到平方映射式(7.6.18a)的两个不动点，如图 7.17 (a) 所示，它们是抛物线与恒等线的两个交点 A 和 B。抛物线的高度与 λ 值有关，最大高度在 $x_n = \dfrac{1}{2}$ 处，且等于 $\dfrac{\lambda}{4}$。如果控制参数 λ 较小（$\lambda \leqslant 1$），抛物线的高度较低，它与恒等线只有一个交点，即原点 A。在这种情况下，不论初值如何，迭代最终趋于原点，原点是唯一的不动点。

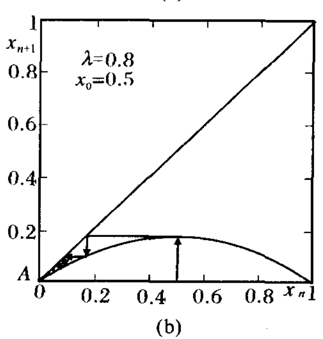
图 7.17 (b) 是 $\lambda = 0.8$ 时的情况，从起始值为 $x_0 = 0.5$ 开始，迭代结果终值走到了坐标原点 $x_{n+1} = 0$。

由式 (7.6.23) 可知，当 $\lambda > 1$ 时平方映射就会出现第二个不动点，它是非零的不动点。从生态学的观点看，非零的不动点意味着某类种群有某个稳定的生存数量。但对于不同的 λ 值，迭代走向这个不动点的过程有所不同。当 λ 较小时，迭代是单调地增长趋向不动点，图 7.17 (c) 所示的 λ 值为 2.1 就属于这种情况。从图中可以看到，虽然起始值很小，$x_0 = 0.2$，但每次迭代使 x_{n+1} 增加，这是一个指数增长并最终稳定的过程。

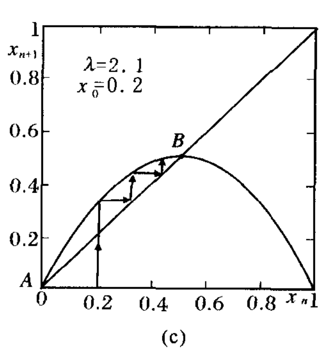
图 7.18 还给出了 $\lambda = 0.28$ 时 x_{n+1} 随迭代次数 n 走向不动点的过程。可见，当 λ 值增大时，迭代先出现振荡起伏，然后逐步稳定在某个数值。



(a)



(b)



(c)

图 7.17　不动点

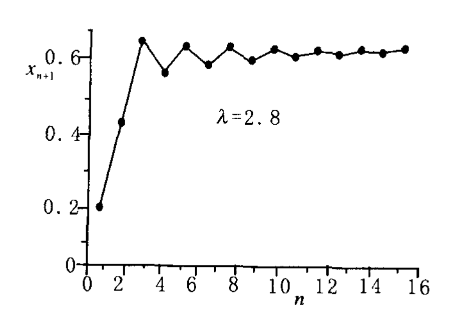
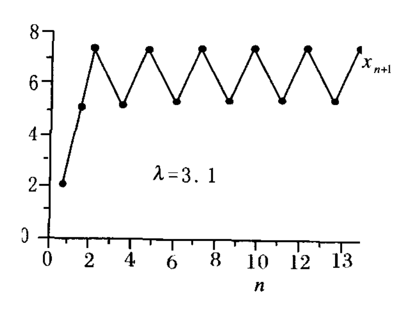


图 7.18　$\lambda=2.8$ 时迭代振荡地趋向一个不动点

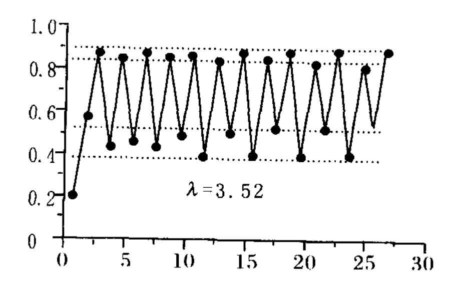
2. 周期轨道

当平方映射式 (7.6.18a) 的控制参数 λ 值从 $\lambda=2.8$ 继续增大时，迭代出现的振荡起伏将一直维持下去，这种情况称为**周期解**。图 7.19 (a) 就是 λ 值为 3.1 时的迭代情况，取起始 $x_0=0.2$，可见迭代的终值 x_{n+1} 在一大一小的两个定值之间往复跳跃，称为**周期 2 轨道运动**。这就是生态学中所谓“大年”和“小年”隔年交替轮换现象。

当 λ 值进一步增大时，迭代出现的振荡起伏更为复杂，计算表明，当 λ 值增大到 3.5 以上时，迭代的终值上下起伏，每隔 4 次出现重复，称为**周期 4 轨道运动**。图 7.19 (b) 就是 $\lambda=3.52$ 时的 x_{n+1} 和迭代次数 n 的变化曲线，仍取起始值为 $x_0=0.2$。由图可见，在经过开始若干次的过渡过程之后，迭代终值 x_{n+1} 就进入了每隔 4 次重复的周期 4 轨道运动。



(a) λ=3.1 时出现周期 2 轨道运动



(b) λ=3.52 时出现周期 4 轨道运动

图 7.19　周期轨道运动

综上述可见，从某次迭代开始，x_i 进入有限数值循环重复状态，即在迭代

次数 $i \geqslant s$ 之后

$$x_s, s_{s+1}, \cdots, x_{s+P-1}$$

和

$$x_{s+P}, x_{s+P+1}, \cdots, x_{s+2P-1}$$

相同的情况，称为**周期 P 轨道**。虽然，不动点是 $P=1$ 的特例，因此常称不动点为**周期 1 轨道**；而上述的 $\lambda=3.1$ 与 $\lambda=3.52$ 时的迭代，则分别是 $P=2$ 的周期 2 轨道与 $P=4$ 的周期 4 轨道。随着 λ 值的增加，还会出现周期数更大的轨道。平方映射的轨道周期随 λ 值的增加而一次次成倍加长的现象称为**倍周期分岔**。图 7.20 给出了倍周期分岔的相图。

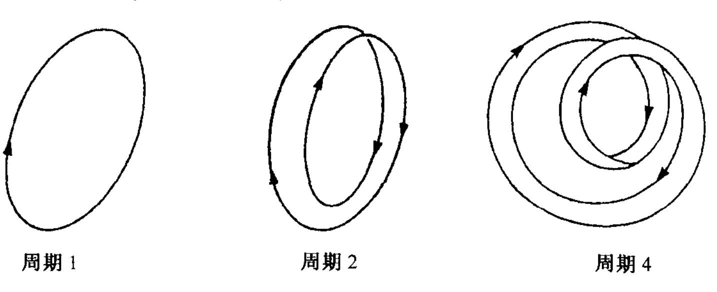


图 7.20　倍周期分岔的相图

3. 准周期轨道

轨道点 x_i 永不重复，永不进入任何周期状态。这里还包含各种不同的可能性，其中有一种人们较为关注，这就是所谓准周期轨道。若盯住一个点 x_k，每迭代一定次数，轨道点就回到 x_k 附近来；如果要求轨道点更靠近 x_k，就必须迭代多次。然而，任何轨道点都不准确重复 x_k 的数值。这种情形称为**准周期轨道**。准周期轨道可以用足够长的周期轨道来足够好的逼近。实质上，准周期轨道就可以看作无限长的周期轨道。

4. 随机轨道

与以上三类不同，所有轨道点随机地取值。这种情形称为**随机轨道**。

5. 混沌轨道

还有一种可能的性态是：轨道点好像是随机地取值。取出有限长的一段轨道进行精度有限的观察时，又会发现其中有某些近似的重复图式或“结构”。如果把这些近似的重复图式作为考察的单位，则它们在整个轨道中出现的方式又是随机的，这是一种**混沌轨道**。如图 7.21 所示。

我们可以利用个人计算机做一个实验，用数值计算和绘图的方法研究抛物线映射式（7.6.18a）进一步看看在 $\lambda=3$ 时，会发生什么事情。我们在开区间

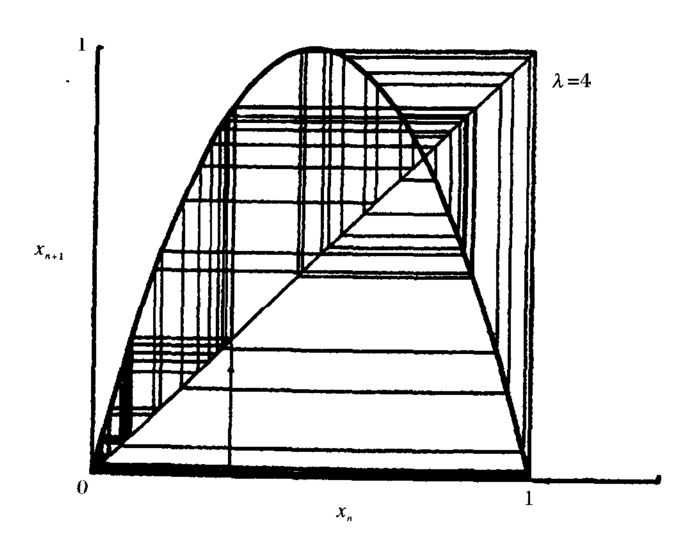


图 7.21 混沌

(0，1)中随机地取一个数作为 x_0 的初值。为了不画过渡过程，舍去最初的部分迭代值（例如 100 个），然后再开始绘制 x_n 的轨迹。究竟给多少个 x_n 值自然要依赖于绘图设备的精度，通常对于每一个 λ 值，绘 200～300 个点，可以得出比较好的图形。为了得到更高的分辨率和反映较精细的结构，还可以取更多的点。慢慢地增加 λ 值，会出现如图 7.22 所示的图形。在 $\lambda=3$ 处，表示稳定的周期 1 的单线开始一分为二，称其为**音叉分岔**或倍周期分岔。在 $\lambda=3.4495$ 处，周期 2 轨道还可以再分岔为周期 4 轨道。接着在 $\lambda=3.5441$ 处由周期 4 分岔为周期 8。这种连续分岔的情况是图 7.22 所示的逻辑斯谛映射的重要特点之一。

由于分辨率的问题，我们看不清图的许多细节。但我们可以肯定如下的事实：大量的周期分岔出现在越来越短的间隔里。经过几次分岔，周期长度成为 2^n。因此，经过大量的分支后周期变得无限长，即不再存在周期性。此时系统的吸引子成为非周期的，即混沌的。出现这种现象的点（λ_∞）称为倍周期序列的**累加点**。

λ 的区间里迭代值序表现周期的时候叫**窗口**。对一切非偶的周期由 3 到无穷大都有窗口。但在我们的图中由于分辨率的关系，这里大于 5 的窗口已看不清楚了，因为它太窄了。

假定用 λ_n 代表周期 2^n 轨道的分支点，则可以有比值

$$\delta=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\lambda_n-\lambda_{n-1}}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}\right) \tag{7.6.24a}$$

$\delta=4669201609\cdots$，称为**费根鲍姆普适常数**。它与系统本身的具体结构的细节无

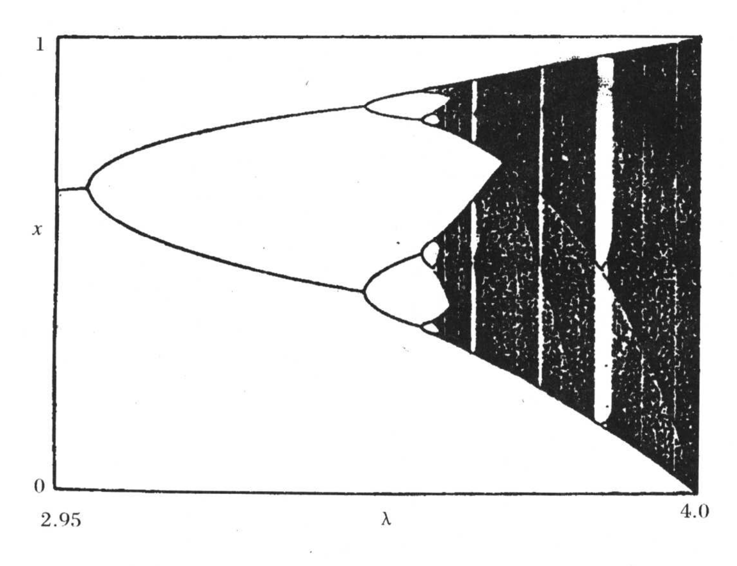


图 7.22 逻辑斯谛映射

关，迭代过程所呈现的特征是相同的。如果我们用 Δ_n 表示 $\lambda_n - \lambda_{n-1}$，则上式又可写为

$$\delta = \lim_{n \to \infty} \frac{\Delta_n}{\Delta_{n+1}} \tag{7.6.24b}$$

可见费根鲍姆常数 δ 的意义就是 Δ_n 参数直奔倍周期累加点处的收敛率。费根鲍姆普适常数的发现改变了过去人们普遍认为非线性问题没有普适规律，只能个别问题个别处理的看法。大大推进了非线性科学研究。

当 $\lambda > \lambda_\infty$ 时，我们说存在着混沌映射，它有三个明显的特征：①对于初始条件具有敏感的依赖性；②它是非周期的；③存在着奇异吸引子。

第一个特征值得我们在这里着重一提，它意味着，混沌是不可预测的。在初始状态，两个相互接近的轨道会随着时间的推移，越来越分开。因为混沌是非周期的，所以它不能被细分或不能被分解为两个互不影响的子系统。然而在混沌性态中，毕竟存在着有规律的成分，即奇异吸引子。我们把参数区间 $\lambda_\infty \leqslant \lambda \leqslant 4$ 称为混沌区域，但并不意味着在这个区域仅存在混沌轨道。事实上，还存在着很多窗口，窗口内有一些周期吸引子。

奇异吸引子，也称**奇怪吸引子**或**混沌吸引子**，至今还无普遍承认的定义。奇异吸引子是一种整体稳定、局部不稳定的状态。现在我们再回到本节开始的洛伦茨方程。其中选 $\gamma = 28$，该参数的选值恰好处在非定常对流将要开始的地方；其余的参数选取如前：$\sigma = 10$，$b = 8/3$。于是式（7.6.1）现在变为

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=-10\,(x-y)\\\dot{y}&=-xz+28x-y\\\dot{z}&=xy-\frac{8}{3}z\end{aligned}\right\}\tag{7.6.25}$$

求解这种非线性方程，除进行数值计算外，别无选择。它得到的吸引子是三维的。图 7.23 给出了数值计算所得的图。其中图（a）为 $\gamma=28$，$b=\frac{8}{3}$，$\sigma=10$ 的情况，即方程（7.6.25）计算所得到的轨道。该图所示只是在 xz 平面的投影，曲线并不是封闭的。而图（b）则为 $\gamma=40$ 的图，即由下述方程进行数值计算所得的图

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=-10\,(x-y)\\\dot{y}&=-xy+40x-y\\\dot{z}&=xy-\frac{8}{3}z\end{aligned}\right\}\tag{7.6.26}$$

我们清楚地看到，所得到的图总体由两个环套组成，好像蝴蝶的两个翅膀。每一环套都有靠得很近的无穷多层，每层上都细密地排列着无穷多回线。代表系统的相点在这一环套上转几圈后，又到那一个环套上转几圈，根本无法预料它什么时候从一个环套过渡到另一个环套。

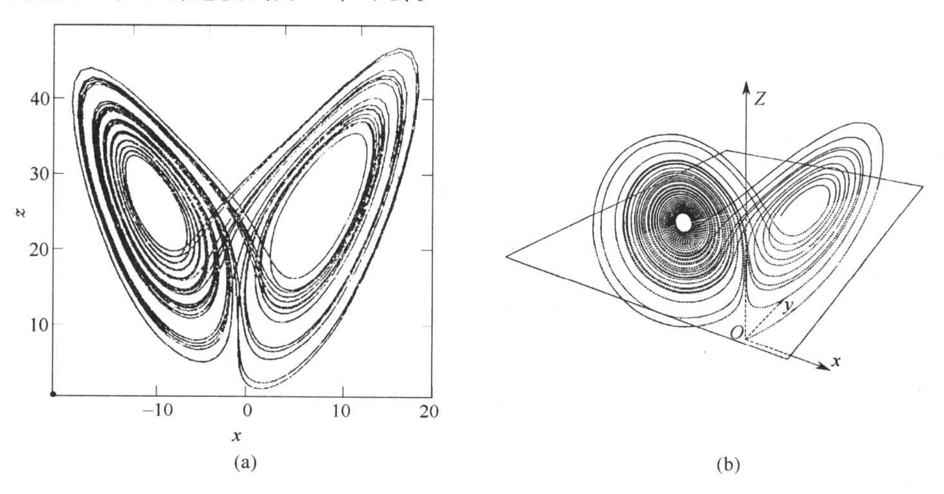


图 7.23　洛伦茨吸引子

在此我们简单回顾一下洛伦茨发现混沌的历程。

一日，洛伦茨在计算过程中已得到了大气方程的一个解，他想知道该解的长期行为。那时候他所使用的计算机速度既慢又笨拙，为了避免再等上几个小时，他不再从头算起，而是把记录下来的中间数据当作初始值输入，洛伦茨原来指望

计算机会重复给出上次计算的后半段结果，然后接下去算新的。然而却没有料到，经过一段重复过程后，计算就逐渐偏离了上次的结果，如图 7.24 所示。在确定了计算机没有发生故障以后，洛伦茨很快意识到问题出在他输入的数据上，他当时计算机的存储器中，每个数保持 6 位 10 进制，例如 0.506127。输出时为了节约空间，只打印 3 位：0.506。洛伦茨输入的是这些较短的经过四舍五入的数字，他假定 1/1000 的误差不会有什么影响。这是个合理的假定。如果气象卫星能以 1/1000 的精确度测定洋面的温度，操作人员就会认为运气不错了。在他第二次输入时使用的是打印出的数字，当时认为只有千分之几的误差，想必关系不大，而按传统的思维方式看待时，确实也可以这样做。但是结果却是未曾料想到的。洛伦茨从中意识到他的那一些方程，并不具有传统数学中可以想像到的那些行为，而是对于初值具有高度的敏感性。于是，他为上述现象取了一个名字，称为**蝴蝶效应**。这个名称源于洛伦茨一次演讲，为了生动地解释对初值的敏感性，他说在巴西有一只蝴蝶扇动翅膀，有可能在美国得克萨斯州掀起一场龙卷风。

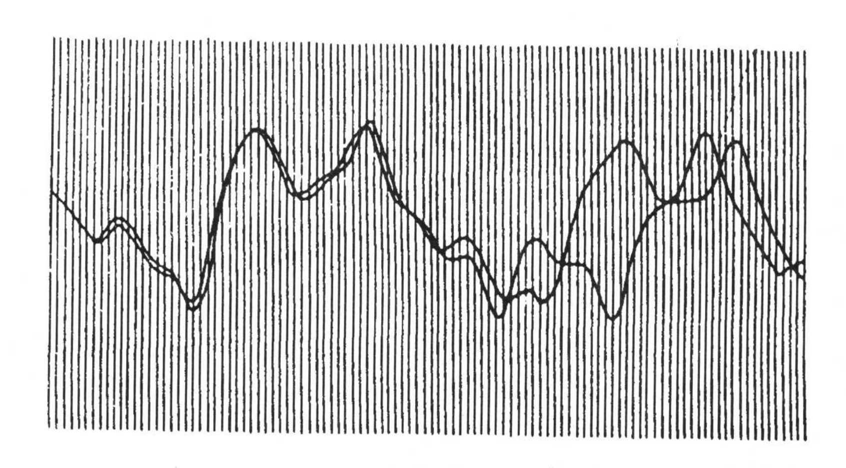


图 7.24 两组数值是如何分道扬镳的

这个问题明显地跟我们预报天气的能力有关。既然我们不可能确切地知道有多少蝴蝶，也不知道它们在哪儿，更不可能知道哪些蝴蝶何时拍打它们的翅膀，所以，即使我们对问题的回答是肯定的，我们也不可能对足够长的未来准确地预测龙卷风的产生。

实际上，在耗散系统中标志着混沌运动全局特征的，正是上面提及的奇异吸引子。作为整体，它确是与初始条件无关的，就这一点而言，耗散系统中的内在随机性与真随机系统中的不可预测性是完全不同的。

洛伦茨吸引子具有相当简单的折叠结构，特点是两片具有球对称性。勒斯勒

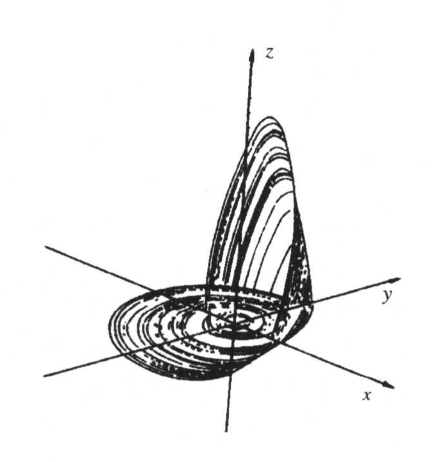


图 7.25 勒斯勒尔吸引子

尔（O.E.Rössler）指出，还可以用两种完全不同的方法从洛伦茨吸引子得出更简单、非对称的吸引子结构。一是研究洛伦茨方程中的 γ 值远远大于 28 时的情况，二是重新构造洛伦茨吸引子的折叠过程。这两种方法都可得到同一拓扑结构，于是他提出了如下的方程组

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= -(y+z)\\ \dot{y} &= x + ay\\ \dot{z} &= b + (x-c)z\end{aligned}\right\} \qquad (7.6.27)$$

这也是三个变量的常微分方程动力系统。式(7.6.27) 中仅第三式含非线性项，a，b，c 为参数，所得的吸引子称为**勒斯勒尔吸引子**，如图 7.25 所示。

7.7 奇异吸引子的刻画

前面我们介绍了混沌产生的原因、模型以及著名的洛伦茨吸引子。本节说明混沌的定量表征。

对初始条件的敏感依赖性是一切混沌系统的必然具备的性质。这个性质可以定量化，用以测量系统混沌程度的这个值就是**李雅普诺夫指数**。

我们简略地回顾一下典型的奇异吸引子的产生过程。在耗散系统中，当连续流在收缩体积时，一方面沿某些方向压缩，另一方向又沿其他方向延伸，由于流保持在一个有界区域内，因而体积在收缩的同时进行折叠，从而产生吸引子。这种伸缩和折叠过程使运动轨道在奇异吸引子上产生混沌运动。奇异吸引子具有不规则的、非周期性、错综复杂的、自相似结构的特性。当观察奇异吸引子的复杂图形时，人们发现，它们不能用传统的数学方法描述，而是分形和**分维**。由上述可见，刻画奇异吸引子的主要手段是李雅普诺夫指数和分形维数。下面分别做简要介绍。

7.7.1 李维普诺夫指数

利用李雅普诺夫指数可以定量地表示映象中相邻点相互分离的快慢或奇异吸引子中轨道分离的快慢（轨道对初始条件的敏感依赖）。

为简单计，我们仍然只讨论一维情形。在一维离散映象

$$x_{n+1} = f(x_n) \qquad (7.7.1)$$

中，初始两点是互相分离（图 7.26 中的 Δx_1）还是靠拢（图 7.26 中的 Δx_2）由下式表示

$$\left.\begin{array}{ll}\left|\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|>1 & \text{映象使两点分离}\\ \left|\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|<1 & \text{映象使两点靠拢}\end{array}\right\} \tag{7.7.2}$$

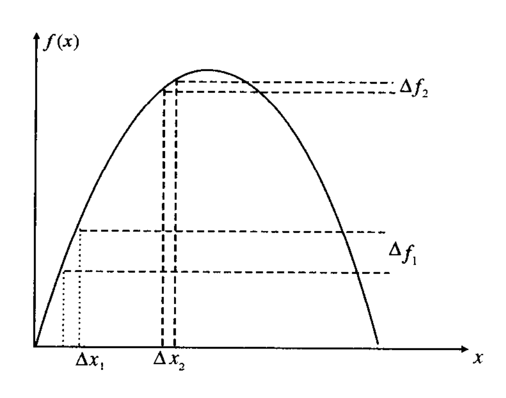


图 7.26　初始两点互相分离或靠拢示意图

但是，在不断的迭代过程中 $|\mathrm{d}f/\mathrm{d}x|$ 的值会随时变化。为了表示从整体看相邻两状态分离的情况，必须对时间（或迭代次数）取平均。为此，设平均每次迭代所引起的指数分离中的指数为 σ，迭代所引起的分离示意图如图 7.26 所示。

可见经 n 次迭代后，原来距离为 ε 的两点现在变为

$$\varepsilon \mathrm{e}^{n\sigma(x_0)} = |f^n(x_0+\varepsilon) - f^n(x_0)| \tag{7.7.3}$$

当取极限 $\varepsilon\to 0$ 时，$n\to\infty$，上式变为

$$\begin{aligned}\sigma(x_0) &= \lim_{n\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{n}\ln\left|\frac{f^n(x_0+\varepsilon)-f^n(x_0)}{\varepsilon}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left|\frac{\mathrm{d}f^n(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}\end{aligned} \tag{7.7.4}$$

实际上，上式与初始点无关。由于

$$\frac{\mathrm{d}f^n(x)}{\mathrm{d}x} = \prod_{i=1}^{n}\left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_i} \tag{7.7.5}$$

利用式（7.7.5）把式（7.7.4）写成如下的形式

$$\sigma = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln \left| \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} \right|_{x=x_i} \tag{7.7.6}$$

式（7.7.6）中的 σ 即称为**李雅普诺夫指数**，它表示在多次迭代中平均每次迭代所引起的指数分离中的指数。逻辑斯谛映象的李雅普诺夫指数如图 7.27 所示。

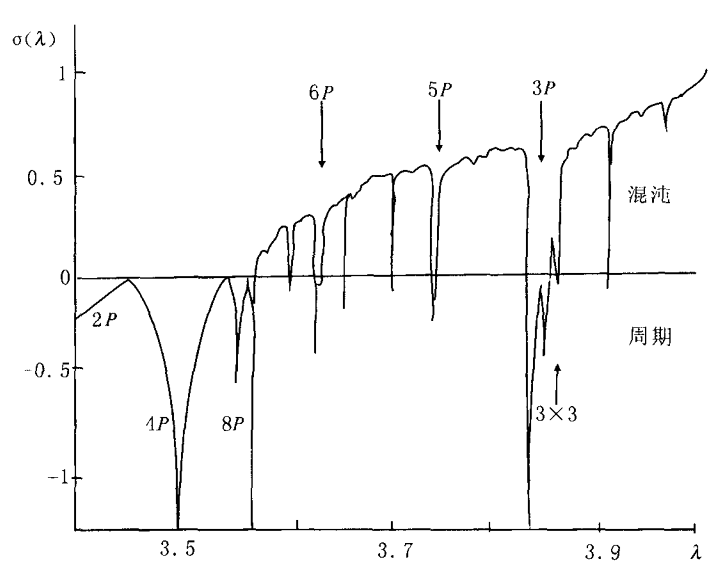


图 7.27 逻辑斯谛映象的李雅普诺夫指数

由式（7.7.4）可知，当 $\sigma<0$ 时，相邻点终归要靠拢合并成一点，这种情况对应于不动点或周期运动；反之，$\sigma>0$ 时，表示相邻点最后要分开，因此它对应于混沌运动。

7.7.2 分维

维数是几何对象的一个重要特征量。何谓维数？从传统的观点看，维数是确定几何对象中一点位置所需要的坐标数，或者说独立变量的数目。这样，我们说点是 0 维，直线是 1 维，平面是 2 维，空间是 3 维。科学上有时根据问题的需要，经常推广到大于 3 的几维空间。在这种推广中，我们总是把维看成非负的整数。实际上，在处理质点运动时，把坐标和动量看作独立变数，把 N 个粒子的系统看作 $6N$ 维相空间中一个点的运动是力学的基础。由此可见，把维数作为自由度的设想是非常自然的，上述这种认识定义的维数通常称为**经典维数**。经典维数是建立在欧几里得几何之上的，因而也称为**欧几里得维数**。

然而经典维数有很大的局限性，即它必须是整数。由于这个维数是独立坐标

数，而坐标数必定是整数，像上面所举的几何直线（或弧线）、平面（或球面）、立体（立方体或球体）都是一些规整而又完全光滑的研究对象，用经典维数足以研究。但是自然界中更多的是一些极不规则不光滑的研究对象，若还利用经典维数来研究，就会感到力不从心。比如，即使原来的微分方程连续地依赖于参数，奇异吸引子的结构也不是连续地随参数变化，而是形成有一些空隙或空洞的自相似结构。事实上，在有限的相空间中确实存在着这样一条轨道，它既不自我重复，又不自我相交，还要产生一切节律，显然这条轨道必须是在有限体积中的一条无限长的线，也就是说，它是一个奇异吸引子。对于传统的欧几里得几何学，这是一道难题。为了突破这种局限性，需要对物体和几何图形的维数的概念进行扩展。

为了扩展维数这一概念，我们先从拓扑学一些基本概念开始。拓扑学是数学的一个分支学科，它是研究几何图形在一一对应的双方连续变换下不变的性质，这种性质称为拓扑性质。例如，画在橡皮膜上的图形，当橡皮膜受到如拉伸、压缩、扭曲之类的形变，但不破裂或折叠时，图形的某些性质保持不变。如曲线的封闭性、两曲线的相交性等性质均无变化，此即拓扑变换下的不变性。例如，对于任何海岛的海岸线，在拓扑上同样都等价于一个圆，其**拓扑维**等于 1。换言之，即使每个海岛的海岸线具有各种复杂形式，但在拓扑学上等价了一个圆，都有相同的拓扑维。对于更抽象更复杂的客体，只要每个局部可以和欧氏空间对应，即使把这样的客体连续地拉伸、压缩、扭曲，其维数也不会改变，这就是**拓扑维** d_t。

测度就是对几何形体的测量。通俗地说，把长度和面积一般化的概念，我们称其为测度①。既然是测量，自然可以有不同的方法，而不同的方法便产生了不同的测度观。传统的测度观，称为**勒贝格测度**，它是以笛卡儿坐标系中各个坐标的笛卡儿集合为覆盖单元，将几何对象覆盖后取下确界而得，所得到的维数就是传统的整数维数。它是建立在欧几里得几何基础上，称其为**欧几里得维数**，也就是我们前边所说的经典维数。另一种测度，称为**豪斯多夫测度**，它是将一抽象集合作为覆盖单元，而这集合的直径的 D 次方之和取下确界便是所测几何客体的测度，这里 D 就是几何客体的维数。显然 D 不必一定是整数，而是一个实数，对于整规几何客体来说，它等于欧几里得维数，对于非整规几何客体，比如对于我们所讨论的混沌吸引子，其维可以是分数，也就是**分维**。

上面的叙述尽管没有用到严格的数学公式，但还是显得过于抽象。我们通过简单的例子直观地予以说明。

测量一个维数为 D 的物体的大小所得的数值 M 与测量所用的长度单位 ε 有

---

① 关于测度的确切定义及其有关概念可参阅董连科编著的《分形理论及其应用》，辽宁科学技术出版社，1991。

关，此关系可以表示为

$$M(\varepsilon) \propto \frac{1}{\varepsilon^D}$$

如通常计算线长（$D=1$），面积（$D=2$）和体积（$D=3$）的数值时，$M(\varepsilon)$的确分别与$\frac{1}{\varepsilon}$，$\frac{1}{\varepsilon^2}$和$\frac{1}{\varepsilon^3}$成正比。把上式写成等式就是

$$M(\varepsilon) = \frac{V}{\varepsilon^D} \tag{7.7.7}$$

式中，常数 V 是$\varepsilon=1$时测量物体大小所得的数值。当把一几何体（或集合）的线度放大 l 倍，此时该几何体的大小（或称广义体积，包括通常所说的长度、面积、体积以至高维体积）将放大 k 倍，则

$$\frac{M}{k} = \frac{V}{(l\varepsilon)^D} = \frac{V}{l^D \varepsilon^D}$$

考虑到式（7.7.7）得

$$k = l^D$$

对上式两边取对数即得关于维数 D 的一种新定义式

$$D = \frac{\ln k}{\ln l} \tag{7.7.8}$$

实际上，也可以用式（7.7.7）直接定义维数。对该式取对数得

$$D = \frac{\ln M - \ln V}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}$$

当 $\varepsilon \to 0$ 时，$M \to \infty$，得到关于维数 D 的另一种定义式

$$D = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln M(\varepsilon)}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \tag{7.7.9}$$

上式定义的维数称为**容量维**。它是首先由著名数学大师柯尔莫哥洛夫定义的，所以又称为**柯尔莫哥洛夫容量维**。优点是易于从数据中测量，因此在实际中特别有用。如果把 M（ε）理解为豪斯多夫测度意义下覆盖的个数，上式就是**豪斯多夫维**。容量维是豪斯多夫维的简化，所以有人把容量维亦称为豪斯多夫维，忽略其间的差别。对于典型的吸引子人们认为豪斯多夫维和容量维有相同的值（但直到现在这一推测的正确性并未得到数学上的证明）。

式（7.7.7）、（7.7.8）和（7.7.9）都可以看作是推广了的维数定义。式（7.7.9）应用到普通的几何体，算得的维数自然都是整数。但对一些具有无穷层次的自相似结构，其计算结果将给出非整数维。为了说明这一点，我们举个非常简单而又著名的康托尔集合作为例子。

取一直线段（0，1），把它分为三等份，然后去掉中间一段，对留下的每一

线段又再三等分并各自去掉中间的一段。如此不断做下去，留下的所有线段就构成所谓**康托尔集合**，俗称**康托尔尘埃**（见图 7.28）。显然，康托尔集合构成一个无穷层次的自相似结构。

为确定康托尔集合的维数，试将一次分割后所得各线段放大 3 倍，如取得第一次分别割后留下的线段$\left(0, \frac{1}{3}\right)$和$\left(\frac{2}{3}, 1\right)$放大 3 倍，即在式（7.7.8）中的 $l=3$，此两线段每一段都恢复到原长 l，从而分割后的线段（共两个线段）总长度为原来的 2 倍，即 $k=2$，因此由式（7.7.8）得康托尔集合的维数为

$$D=\frac{\ln 2}{\ln 3}=0.63093 \tag{7.7.10}$$

	M	c
0 ——— 1	1	1
0 — 1/3　2/3 — 1	2	1/3
0 1/9　2/9 1/3　2/3 7/9　8/9 1	4	1/9
0 … 1	8	1/27

图 7.28　康托尔集合

对于洛伦茨吸引子，经计算后可知其维数在 2 与 3 之间。当洛伦茨方程（7.6.1）中，取参数值 $\sigma=10$，$\gamma=45.92$，$b=4$ 时，由式（7.7.8）可得 $D=2.06$。再如勒斯勒尔吸引子，当取参数 $a=b=0.2$，$c=5.7$ 时，得 $D=2.014$。

对于非整数维，人们习惯上称之为**分维**。维数从最初只能取整数扩展到可以取分数，这是维数概念发展中划时代的突破。现在人们已经提出了不少关于维数的定义。这乃因至今尚未找到对任何事物都适用的普适定义。由于测定维数的对象不同，有的定义对某些对象适用，而对另一些对象却不适用。除了上面介绍的容量维以外，还有诸如相似维、关联维、信息维等。限于篇幅和授课时数限制，不能一一介绍，感兴趣的读者可参阅进一步的读物。

7.8　混沌的普遍性

这一章我们只比较简略地讨论了一维非线性映象在参数改变时如何经过倍周期分岔序列进入混沌状态。实际上通向混沌的道路有多种，如阵发混沌道路，吕埃勒-塔肯斯（Ruelle-Takens）道路等。在自然界中，混沌现象是很普遍的。几乎可以说，自然界存在的绝大部分运动都是混沌运动，规则运动相对地只在局部的范围和较短的时间内存在。无论耗散系统或保守系统都存在混沌运动。保守系统可以分为可积的与不可积的两大类，不可积性就意味着混沌运动。如果以方程

的结构与参数为轴构造一个空间，那么这个空间中绝大部分方程都是不可积的，都具有混沌运动。这从数学角度说明了混沌的普遍性。完全不可积系统的运动将遍历整个等能面，微观保守系统的不可积性导致了宏观系统的不可逆性。正是不可积的普遍性，使所有宏观现象都是不可逆的，所有宏观系统都属于耗散系统。我们周围的世界是不断发展变化的，具有各种各样的耗散结构。开放系统最简单的耗散结构是由极限环描述的周期运动。两个或两个以上周期运动的耦合会产生混沌运动。因此，具有耗散结构的系统，当非线性进一步增强时，一般都会出现混沌运动。

混沌，带着古老传说的神秘和当代科学前沿的探索，正不胫而走，引起越来越多的关注。有的学者宣称，20 世纪的科学只有三件事将被人们永远铭记，这就是相对论、量子论和混沌，甚至把混沌誉为 20 世纪科学的第三次革命。进入 21 世纪后，对混沌的研究更是深入到自然科学和人文社会科学的各个领域。有位物理学家说：“相对论排除了绝对空间和时间的牛顿幻觉；量子论排除了对可控测量过程的牛顿迷梦；混沌则排除了拉普拉斯的可预见性的狂想。”

最后，我们再次强调指出，混沌并非混乱，作为一个科学概念，它不等同于概率意义上的随机，其本质是确定性系统产生的行为。混沌的发现开创了科学模型化的一个新典范。一方面混沌系统对初始条件的极端敏感依赖性，它能够放大微小的差异，导致系统的长期行为不可预测；另一方面，混沌现象所固有的确定性表明，许多随机现象实际上比过去更容易预测。混沌现象的研究表明，并非所有貌似随机的行为都是由复杂的系统产生。由于受非线性因素的影响，少数自由度即可产生比较复杂的行为。过去那些过分复杂、貌似随机的信息常被束之高阁，实际上这些信息可以用简单的法则加以解释。在这种情况下，有可能建立确定性模型，并得到比传统的线性随机模型更好的短期预测。混沌理论仿佛是一双刃剑，对预测的影响是两方面的。它表明即使近似的长期行为也是不可能预测的，但短期行为可能做到准确的预测。混沌的发现为确定性系统与随机系统之间架起一座桥梁。

自 20 世纪 60 年代初期洛伦茨发现混沌以来，对混沌的探索已历经数十载。大量的研究揭示，混沌现象广泛存在，比比皆是。然而长期以来，感到它虽然视之可见，却不易控制，难于驾驭。所谓**控制混沌**，就是把动力学系统的混沌性态转化为事先确定的平衡状态或周期性态，甚至非周期性态或新的混沌性态，并实现控制。值得注意的是，控制混沌并非仅要消除混沌运动，而且还要达到事先确定的非混沌态或混沌运动。对于混沌控制的研究近年来已经取得了一些突破性进展，并且在如通讯、医学等领域的实际应用已初见端倪。

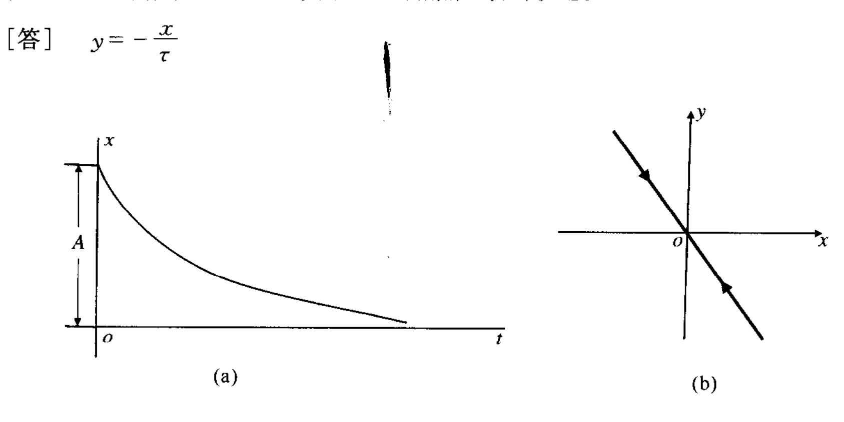
习　题

7.1 设某物体的运动为一指数衰减曲线，其数学表示式为

$$x = A\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

式中，τ 为时间常数，试在 x-$\dot{x}$ 平面上画出相点运动的轨道。

［答］ $y = -\frac{x}{\tau}$



题 7.1 图

7.2 用计算器考察 $x_{n+1} = 3x_n(1 - x_n)$ 迭代过程的终态，假定 $x_0 = 0.2$。

7.3 用计算器考察 $x_{n+1} = 0.8x_n(1 - x_n)$ 迭代过程的终态，假定 $x_0 = 0.5$。

7.4 用计算器考察 $x_{n+1} = 2.1x_n(1 - x_n)$ 迭代过程的终态，假定 $x_0 = 0.2$。

7.5 用计算器考察 $x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n)$ 迭代过程及对初值的敏感性。设两个相差很小的初值分别为 $x_0 = 0.4000001$ 和 $x'_0 = 0.4000002$，并由此说明混沌与真随机性的区别。

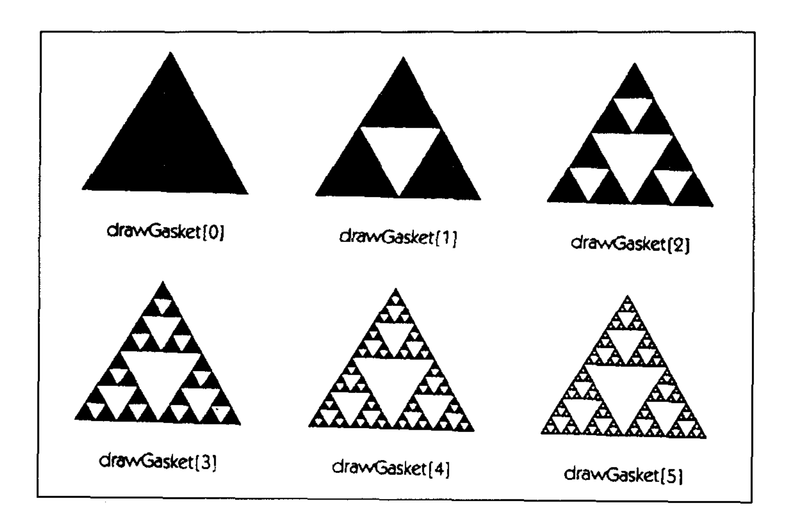
7.6 将一正三角形等分成四个小的正三角形，并弃去中间一个；然后将余下的三个正三角形再分别等分为四个更小正三角形，并弃去各自中间的一个；然后再将余下的正三角形按同样的方法处理，如此无限地处理下去（题 7.6 图），最后所得之图好像一个三角形的垫片，称"谢尔平斯基（Sierpinski）垫片"。试计算谢尔平斯基垫片的分维。

［答］ $D = \frac{\ln 3}{\ln 2} = 1.5849$

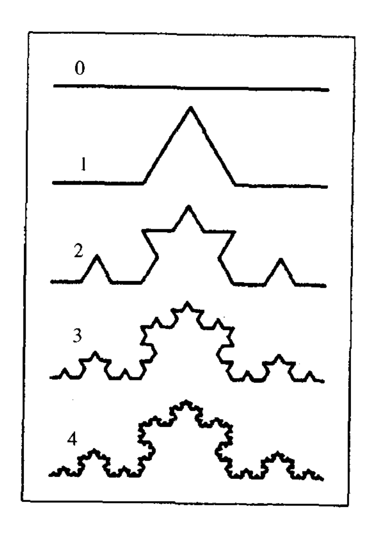
7.7 取一单位长直线段，将其三等分，舍去中间一段，而以底边在被舍去线段上的等边三角形的另两边替代；继之，对所得的线段实施如前的步骤；以后仿此重复，便得到所谓科赫（Koch）曲线（题 7.7 图），试计算科赫曲线的分维。

［答］ $D = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1.2619$

7.8 试用你熟悉的计算机语言（例如 QBASIC，C，MATLAB 等）编写出平方映射随参数 λ 值变化的计算机程序，并上机调试。



题 7.6 图



题 7.7 图　科赫曲线

附　　录

Ⅰ　矢量、矩阵及其运算

Ⅰ.1 矢量的表示和运算

Ⅰ.1.1 引言

物理学是一门关于可观测（可定量测量）的物理量和各物理量的确定值之间关系的科学。有一些物理量仅需要一个数量就能完全确定，例如长度、体积、质量、时间、温度、声频、光速和电荷就是这样的物理量，我们称其为**标量**。标量可为正量或负量，例如温度高于零度为正，而低于零度为负，电量同样有正有负。但是有些标量（例如体积、质量）则恒为正。标量是代数量，并且对它们可以施行任何代数运算：加减乘除等。

然而，某些物理量的确定，除了知道它的数值外，还必须指出它的方向，例如只说力的量值是不够的，还须指出力的作用方向。又如要说明三维空间中的直线位移，需要两个以上的数量，由它们可以确定位移的方向。任何像直线位移这样的物理量，除用大小和方向说明外，它与另一同类型物理量相加，遵从两个相继位移的加法法则，并给出具有大小和方向唯一的物理量，则称该物理量为**矢量**。在整个力学中（以及在其他物理学分支中），我们将遇到许多兼有数值和方向的量，例如速度、加速度、力、电场、磁偶极矩等等。

符号是数学语言的重要组成部分，所以恰当地使用符号的技巧也就成为数学分析方法的重要部分。矢量符号具有下述两个重要性质：

1. 物理定律的矢量表述与坐标轴的选择无关。矢量符号提供了一种语言，使物理定律的表述无须引入坐标系而具有物理内容。

2. 矢量符号是简洁的。许多物理定律用矢量表述时具有简单、明了而优美的形式，而把它在某一特定坐标系中写出时，这一点就看不出来。

尽管在解算具体问题时，我们往往在特殊坐标系下进行运算，但是陈述物理定律时，我们还是尽量来用矢量形式。有些更复杂的定律（如广义相对论），它们无法用矢量形式表示，就可能要用**张量**表示。张量是矢量的推广，而标量和矢量都是它的特例而已。后面我们将会知道，标量是零阶张量，而矢量是一阶张量。

矢量在物理学问题中之所以有用和适用，这主要是**欧几里得**几何学的缘故。

用矢量形式来陈述一个定律通常都附带有**欧几里得**几何的假定。如果有关几何不是欧氏的，也许就不可能用简单、明确的方法把两个矢量相加。对于弯曲空间，有一种更普遍的语言，即微分几何学，它是广义相对论的语言。在广义相对论这个物理学领域中，欧氏几何不再是足够精确的了。

虽然说我们所考虑的矢量是一个既有方向又有数值的量，而方向和数值都绝不涉及特殊的坐标系，尽管我们要用一个参考物，例如实验室或恒星等才能确定方向。可是我们将会看到，有些量虽然具有数值和方向，但却不是矢量，例如有限转动就是这样。

按照惯例，我们采用的矢量符号如下：手写时（例如在黑板上）为了表示矢量，在相应的字母 A 上面画一箭头 $\vec{A}$。在印刷品中，矢量一般排成黑体字 $\boldsymbol{A}$，矢量的数值印成斜体字 A 或 $|\boldsymbol{A}|$。矢量的数值是一个标量，任何一个矢量都可以表示成一个标量与单位大小的矢量的乘积，单位大小的矢量称**单位矢量**。如果 $\boldsymbol{e}_A$ 是 $\boldsymbol{A}$ 方向上的单位矢量，则矢量 $A\boldsymbol{e}_A$ 就是一个在 $\boldsymbol{A}$ 方向上有大小（模）为 A 的矢量，记作

$$\boldsymbol{A} = A\boldsymbol{e}_A \qquad (\text{I}.1)$$

Ⅰ.1.2 矢量的相等

两个表示同一物理量（如力）的矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，如果它们的数值和方向都相同，则这两个矢量相等，记作

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \qquad (\text{I}.2)$$

这种相等称为**几何相等**，说“几何”二字是强调此二矢量平行且同向两层意思。

虽然一个矢量可以指的是由某一特定点所确定的量，但矢量却无需限定位置。即使两个矢量是在不同时间和不同空间位置的一个物理量，它们仍然是可以比较的。如果我们不能根据实验而确信我们可以把空间看成是平直的，也就是**欧几里得**空间（极远处可能除外），那么我们就不可能那样肯定地去把在不同点处的两个矢量加以比较。

大小（模）为零的矢量定义为零矢量 $\boldsymbol{O}$。零矢量的始点与其终点相重合，而矢量本身变为一个点。

矢量可以平行移动到任意一点，因而当研究几个矢量时，我们总可以将它们的始点移到一点 O，而把这一点看作它们的公共始点。

我们必须注意，当我们采纳这些定义时，不能将力与矢量同样看待，因为力的作用点只能沿着力的作用线移动，而不能够向任意点。

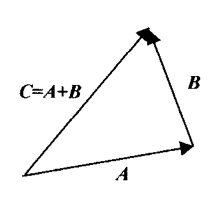
我们还须指出，大小的概念只能应用于数量，因此只有矢量的模才能适用不等式。

Ⅰ.1.3 矢量的加法和减法

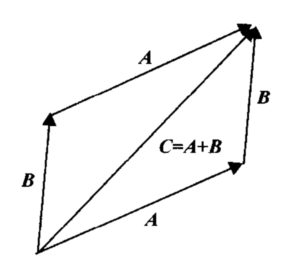
两个矢量的几何和就是由这两个矢量所构成的平行四边形的对角线，因而矢

量加法的这种规则称为矢量加法的平行四边形法则。具体做法是，先画一个带矢号的直线表示矢量 $\boldsymbol{A}$，从它的末端画另一个带矢号的直线表示矢量 $\boldsymbol{B}$，从 $\boldsymbol{A}$ 的始端到 $\boldsymbol{B}$ 的末端画出带有指向 $\boldsymbol{B}$ 末端矢号的直线就代表这两个矢量之和的矢量 $\boldsymbol{C}$［见图Ⅰ.1（a)］。不在一个平面上的三个矢量的几何和就是由它们所组成的平行六面体的对角线［见图Ⅰ.1（c)］。从图Ⅰ.1（b）可清楚地看到，矢量加法满足对易律

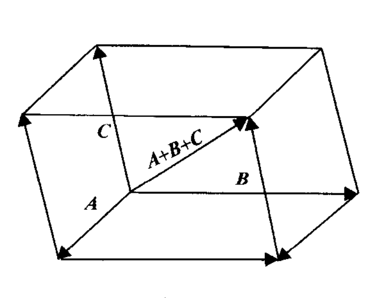
$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A} \tag{Ⅰ.3}$$



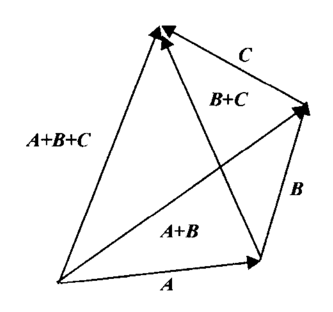
(a) 矢量加法的图形表示



(b) 矢量加法的对易律



(c) 不在一个平面上的三个矢量的几何和



(d) 矢量加法的结合律：（$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$）$+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+$（$\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$）

图Ⅰ.1 矢量加法

它也满足结合律［参见图Ⅰ.1（d)］

$$\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C} \tag{Ⅰ.4}$$

如果两个矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 之和等于零矢量

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=0 \tag{Ⅰ.5}$$

则 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 这两个矢量必然大小相等，方向相反。于是由式（Ⅰ.5）得

$$\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{A} \tag{Ⅰ.6}$$

这告诉我们：$-\boldsymbol{A}$ 也是一个矢量，其大小与 $\boldsymbol{A}$ 相同，但指向与 $\boldsymbol{A}$ 相反。这样，我们就把矢量 $\boldsymbol{A}$ 减矢量 $\boldsymbol{B}$ 定义为矢量 $\boldsymbol{A}$ 和矢量（$-\boldsymbol{B}$）的加法

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B}) \tag{Ⅰ.7}$$

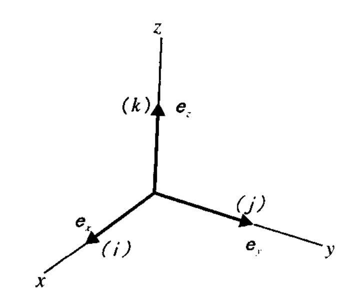
Ⅰ.1.4 矢量的投影表示

一个矢量 $\boldsymbol{A}$ 可以用它在一组坐标轴上或基矢上的投影表示成代数形式，在直角坐标系中，选取沿正 x，y 和 z 轴的单位矢量作为基矢，通常分别用符号 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 表示（见图Ⅰ.2），或用 $\boldsymbol{e}_x$，$\boldsymbol{e}_y$ 和 $\boldsymbol{e}_z$ 表示，有时也用 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 和 $\boldsymbol{e}_3$ 表示。当有些公式用分量求和的形式表示时，后者会显得更为方便。

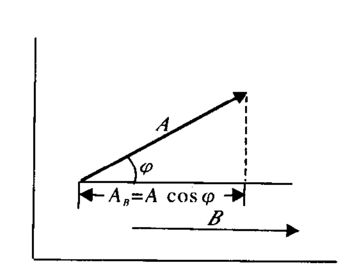
矢量 $\boldsymbol{A}$ 在另一矢量 $\boldsymbol{B}$ 上的投影用矢量 $\boldsymbol{A}$ 的末端和始端到平行于 $\boldsymbol{B}$ 直线上垂足间的线段长度 A_B 表示（见图Ⅰ.3），若令 φ 表示矢量 $\boldsymbol{A}$ 与过 $\boldsymbol{A}$ 的始端并沿 $\boldsymbol{B}$ 方向的两个夹角中较小的那个角，则

$$A_B = A\cos\varphi \tag{Ⅰ.8}$$

角 φ 称为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 间的夹角



图Ⅰ.2 直角坐标系的单位基矢



图Ⅰ.3 矢量 $\boldsymbol{A}$ 在矢量 $\boldsymbol{B}$ 上的投影

一个任意矢量 $\boldsymbol{A}$ 可写作

$$\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{e}_x+A_y\boldsymbol{e}_y+A_z\boldsymbol{e}_z \tag{Ⅰ.9}$$

其中，A_x，A_y 和 A_z 是 $\boldsymbol{A}$ 沿正 x，y 和 z 轴的分量，例如考虑位于 xy 平面内的矢量 $\boldsymbol{A}$（$A_z=0$）。在这种情况下，总可以将该矢量放在一个直角三角形的斜边上，其直角边分别平行于 x 轴和 y 轴的正方向。由图Ⅰ.4 知

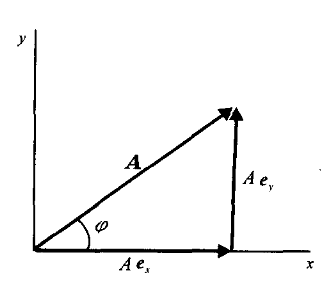
$$\left.\begin{aligned} A_x &= A\cos\varphi \\ A_y &= A\sin\varphi \end{aligned}\right\} \tag{Ⅰ.10}$$

以及关系式

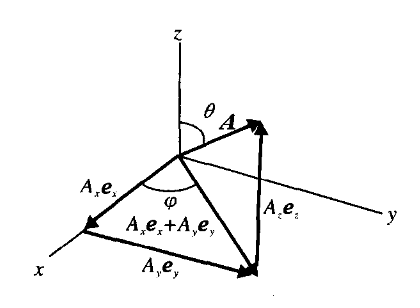
$$A^2 = A_x^2 + A_y^2 \tag{Ⅰ.11}$$

$$\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{e}_x+A_y\boldsymbol{e}_y \tag{Ⅰ.12}$$

图Ⅰ.5 是推广到三维矢量的情况，令矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 z 轴正方向的夹角为 θ，$\boldsymbol{A}$ 在 xy 平面上的投影与 x 正方向的夹角为 φ，则



图Ⅰ.4 平行于 xy 平面的矢量 $\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{e}_x + A_y\boldsymbol{e}_y$ 的图示



图Ⅰ.5 $\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{e}_x + A_y\boldsymbol{e}_y + A_z\boldsymbol{e}_z$ 的图示

$$\left.\begin{aligned} A_x &= A\sin\theta\cos\varphi \\ A_y &= A\sin\theta\sin\varphi \end{aligned}\right\} \quad (\text{Ⅰ}.13)$$

$$A_z = A\cos\theta$$

$$A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 \quad (\text{Ⅰ}.14)$$

显然有

$$\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{e}_x + A_y\boldsymbol{e}_y + A_z\boldsymbol{e}_z \quad (\text{Ⅰ}.15)$$

根据两个矢量相等的定义，显然它们的 x，y 和 z 分量相等是两个矢量相等的必要兼充分条件。而且两个或多个矢量之和的 x，y 和 z 分量分别等于诸矢量各分量的和。这就是说，如果矢量 $\boldsymbol{C}$ 是矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的和

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} \quad (\text{Ⅰ}.16)$$

则

$$C_x = A_x + B_x, \qquad C_y = A_y + B_y, \qquad C_z = A_z + B_z \quad (\text{Ⅰ}.17)$$

Ⅰ.1.5 矢量的乘法

给定矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，有两种矢量乘法。一种乘法叫做**标积**或**点乘**，定义如下

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = AB\cos\varphi \quad (\text{Ⅰ}.18\text{a})$$

式中，φ 是矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的夹角。若用分量表示

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \quad (\text{Ⅰ}.18\text{b})$$

根据点乘的定义，它满足对易律

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A} \quad (\text{Ⅰ}.19)$$

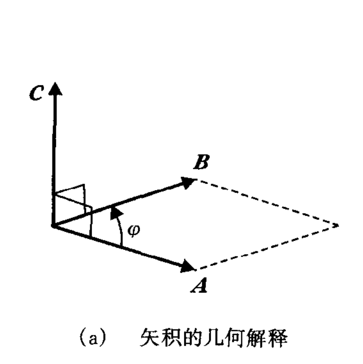
显然，正交坐标系中单位矢量间的标积为

$$\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j = \delta_{ij} \quad (\text{Ⅰ}.20)$$

式中，δ_{ij} 称为克罗内克尔（Kronecker）符号，当 $i = j$ 时，其值为 1，当 $i \neq j$ 时，其值为零，即

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (\text{Ⅰ}.21)$$

矢量的另一种乘法称为**矢积或叉积**。矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的矢积矢量 $\boldsymbol{C}$ 是这样一个矢量，它的模［见图Ⅰ.6（a)］等于矢量 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 所组成的平行四边形的面积，而方向垂直于它们的平面，使矢量 $\boldsymbol{A}$ 沿最短途径绕 $\boldsymbol{C}$ 转至矢量 $\boldsymbol{B}$ 时和已选定的坐标系自 x 轴绕 z 轴转至 y 轴的情况完全一样，也就是说，在右手坐标系时是逆时针方向转［见图Ⅰ.6（b)］，而在左手坐标系是顺时针方向转。可见，矢积的方向与坐标的选择有关，本书均采用右手坐标系。



(a)　矢积的几何解释

(b)　右手坐标系矢积图示

图Ⅰ.6　矢积

矢积由下式表示

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} \tag{Ⅰ.22}$$

矢积的模等于

$$|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|=AB\sin\varphi \tag{Ⅰ.23}$$

若 $\boldsymbol{C}$ 方向的单位矢量记作 $\boldsymbol{n}$，则矢积可以表示为

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=AB\sin\varphi\,\boldsymbol{n} \tag{Ⅰ.24}$$

我们会经常需要用矢量的投影表示矢积。设已知两矢量 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 分别为

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{A}&=A_x\boldsymbol{e}_x+A_y\boldsymbol{e}_y+A_z\boldsymbol{e}_z\\ \boldsymbol{B}&=B_x\boldsymbol{e}_x+B_y\boldsymbol{e}_y+B_z\boldsymbol{e}_z\end{aligned}\right\} \tag{Ⅰ.25}$$

则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}\\ &=(A_yB_z-A_zB_y)\boldsymbol{e}_x+(A_zB_x-A_xB_z)\boldsymbol{e}_y+(A_xB_y-A_yB_x)\boldsymbol{e}_z\end{aligned} \tag{Ⅰ.26}$$

矢积的投影是

$$\left.\begin{aligned}[\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}]_x&=A_yB_z-A_zB_y\\ [\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}]_y&=A_zB_x-A_xB_z\\ [\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}]_z&=A_xB_y-A_yB_x\end{aligned}\right\} \tag{Ⅰ.27}$$

若将下标 x，y，z 用1，2，3替代，那么上述矢积的投影可以用下面一个式子表示

$$[\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}]_i = \sum_{j,k}\varepsilon_{ijk}A_jB_k \quad (\text{Ⅰ}.28)$$

式中，ε_{ijk}是排列符号，称为勒维－西维塔（Levi-Civita）符号［亦称为爱丁顿(Eddington)］张量，它有如下性质

$$\varepsilon_{ijk}=\begin{cases}1 & \text{当 } ijk \text{ 进行偶次置换能还原成 123 的自然次序}\\ -1 & \text{当 } ijk \text{ 进行奇次置换能还原成 123 的自然次序}\\ 0 & \text{当 } ijk \text{ 有任意二指标相等}\end{cases} \quad (\text{Ⅰ}.29)$$

因此

$$\varepsilon_{123}=\varepsilon_{231}=\varepsilon_{312}=1$$

$$\varepsilon_{132}=\varepsilon_{213}=\varepsilon_{321}=-1$$

$$\varepsilon_{122}=\varepsilon_{313}=\varepsilon_{211}=0$$

应用上述记号可以把（$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$）的分量清楚地表示出来。对于 $i=1$，不论 j，$k=2$，3的排列次序如何，不为零的 ε_{ijk}仅有ε_{123}和 ε_{132}，所以

$$[\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}]_1 = \sum_{j,k}\varepsilon_{1jk}A_jB_k = \varepsilon_{123}A_2B_3+\varepsilon_{132}A_3B_2 = A_2B_3-A_3B_2$$

同理

$$[\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}]_2=A_3B_1-A_1B_3$$

$$[\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}]_3=A_1B_2-A_2B_1$$

利用置换符号，我们可以把单位矢量之间的矢积写成

$$\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j = \sum_k\varepsilon_{ijk}\boldsymbol{e}_k = \varepsilon_{ijk}\boldsymbol{e}_k \quad (\text{Ⅰ}.30)$$

矢量 $\boldsymbol{A}$ 与矢量$\boldsymbol{B}$ 和$\boldsymbol{C}$ 矢积的标乘称为**混合积**，利用这些矢量的直角坐标分量，混合积可表为

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\begin{vmatrix}A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\\ C_x & C_y & C_z\end{vmatrix} \quad (\text{Ⅰ}.31)$$

通过交换行列式的行可得

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{B}) \quad (\text{Ⅰ}.32)$$

由于 $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$，$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}$ 和$(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{B}$ 是恒等的，习惯上常省去混合积中的括号。

从几何上讲，如果三个矢量 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 的值具有长度量纲，则它们的混合积表示由这三个矢量所构成的平行六面体的体积（见图Ⅰ.7）。该体积等于它的底面积与它的高的乘积。对于图Ⅰ.7中由矢量$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$和$\boldsymbol{C}$构成的平行六面体的

底面积 S 是由 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 构成的平行四边形的面积，表示成公式是

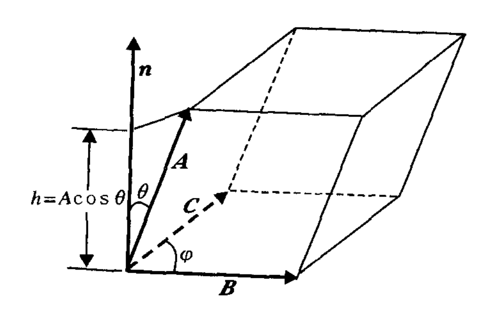
$$S = BC\sin\varphi = |\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}|$$

高度 h 可表示为

$$h = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n} = A\cos\theta$$

其中，$\boldsymbol{n}$ 是垂直于底面积的单位矢量，这样，平行六面体的体积公式是

$$V = |\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}|A\cos\theta = |\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}|$$



图Ⅰ.7　三个矢量 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 构成的平行六面体的体积 $V=(A\cos\theta)(BC\sin\varphi)$
$=|\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}|$

另一种有用的三重积是 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$，容易证明

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} \tag{Ⅰ.33}$$

当 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}$ 时，上式变为

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}) = A^2\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{A} \tag{Ⅰ.34}$$

Ⅰ.2 标量和矢量的变换性质

Ⅰ.2.1 坐标变换

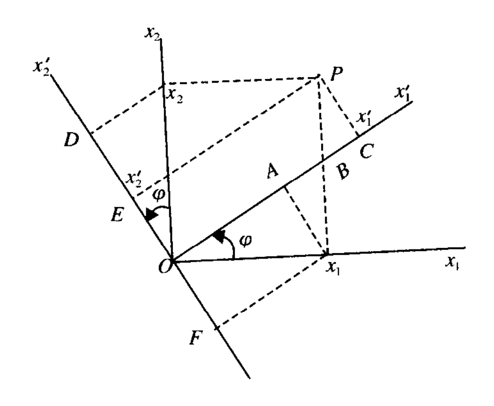
设点 P 相对于某一坐标系的坐标为 x_1，x_2，x_3。考虑另一坐标系，它是由原坐标系通过简单旋转得出。设 P 点相对于新坐标系的坐标为 x_1',，x_2'，x_3'。上述情况我们以二维为例用图Ⅰ.8说明。

从图Ⅰ.8可见，新坐标 x_1'是 x_1 在 x_1'轴上的投影（线段 OA）与 x_2 在 x_1'轴上的投影（线段 $AB+BC$）之和，即

$$x_1' = x_1\cos\varphi + x_2\sin\varphi = x_1\cos\varphi + x_2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) \tag{Ⅰ.35a}$$

新坐标 x_2'是类似的投影之和：$x_2' = OD - DE$，但是线段 DE 恰好等于线段 OF，所以

$$x_2' = -x_1\sin\varphi + x_2\cos\varphi = x_1\cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right) + x_2\cos\varphi \tag{Ⅰ.35b}$$



图Ⅰ.8 坐标变换

引入如下记号，把 x_1'轴与 x_1 轴的夹角记作（x_1'，x_1）把 x_2'与 x_1 轴的夹角记作（x_2'，x_1），照此类推，把 x_i' 轴与 x_j 轴的夹角记作（x_i'，x_j），而且把（x_i'，x_j）的余弦以 λ_{ij}表示，即

$$\lambda_{ij} \equiv \cos(x_i', x_j) \tag{Ⅰ.36}$$

所以在图Ⅰ.8 的情形下有

$$\left.\begin{aligned}
\lambda_{11} &= \cos(x_1', x_1) = \cos\varphi \\
\lambda_{12} &= \cos(x_1', x_2) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi \\
\lambda_{21} &= \cos(x_2', x_1) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -\sin\varphi \\
\lambda_{22} &= \cos(x_2', x_2) = \cos\varphi
\end{aligned}\right. \tag{Ⅰ.37}$$

于是，变换方程变为

$$\begin{aligned}
x_1' &= x_1\cos(x_1', x_1) + x_2\cos(x_2', x_2) \\
&= \lambda_{11}x_1 + \lambda_{12}x_2
\end{aligned} \tag{Ⅰ.38a}$$

$$\begin{aligned}
x_2' &= x_1\cos(x_2', x_1) + x_2\cos(x_2', x_2) \\
&= \lambda_{21}x_1 + \lambda_{22}x_2
\end{aligned} \tag{Ⅰ.38b}$$

推广到三维则有

$$\left.\begin{aligned}
x_1' &= \lambda_{11}x_1 + \lambda_{12}x_2 + \lambda_{13}x_3 \\
x_2' &= \lambda_{21}x_1 + \lambda_{22}x_2 + \lambda_{23}x_3 \\
x_3' &= \lambda_{31}x_1 + \lambda_{32}x_2 + \lambda_{33}x_3
\end{aligned}\right\} \tag{Ⅰ.39}$$

或者用求和号表示

$$x_i' = \sum_{j=1}^{3} \lambda_{ij}x_j \qquad (i, j = 1,2,3) \tag{Ⅰ.40}$$

逆变换公式为

$$x_1 = x_1'\cos(x_1', x_1) + x_2'\cos(x_2', x_1) + x_3'\cos(x_3', x_1)$$
$$= \lambda_{11}x_1' + \lambda_{21}x_2' + \lambda_{31}x_3'$$

同理可以写出

$$x_2 = \lambda_{12}x_1' + \lambda_{22}x_2' + \lambda_{32}x_3'$$
$$x_3 = \lambda_{13}x_1' + \lambda_{23}x_2' + \lambda_{33}x_3'$$

逆变换的普遍表示式为

$$x_i = \sum_{j=1}^{3} \lambda_{ji}x_j' \qquad (i, j = 1,2,3) \tag{Ⅰ.41}$$

量 λ_{ij} 恰好是 x_i' 轴相对于 x_i 轴的方向余弦。按读者在线性代数中熟知的方法，把 λ_{ij} 排成一个方阵，此方阵称之为**矩阵**。用符号 $\boldsymbol{\lambda}$ 表示各元素 λ_{ij} 按上述方式排列的整体

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{bmatrix} \tag{Ⅰ.42}$$

当 $\boldsymbol{\lambda}$ 以上述方式定义并确定了点的坐标变换性质时，$\boldsymbol{\lambda}$ 就称为**变换矩阵**。相应地把 λ_{ij} 称为变换矩阵元。

Ⅰ.2.2　变换矩阵的性质

Ⅰ.2.1 小节我们引入了新旧坐标系之间的变换。由于两种坐标系都是直角坐标系，所以矢量的量值等于各分量的平方之和。再说，不论哪一种坐标系，实际矢量总是不变的，因而矢量的量值在两种坐标系中必定相同。我们用符号把这种量值的不变性表达为

$$\sum_{i=1}^{3} x_i'x_i' = \sum_{i=1}^{3} x_ix_i \tag{Ⅰ.43}$$

式（Ⅰ.43）左边等于

$$\sum_{i,j,k} \lambda_{ij}\lambda_{ik}x_jx_k$$

可见，当且仅当

$$\sum_{i} \lambda_{ij}\lambda_{ik} = \delta_{jk} \qquad (j, k = 1,2,3) \tag{Ⅰ.44}$$

时，式（Ⅰ.43）的左边才能化为式（Ⅰ.43）右边的形式。具有式（Ⅰ.43）所要求性质的线性变换式（Ⅰ.40）均称为**正交变换**。式（Ⅰ.44）从而称为正交化条件。式（Ⅰ.44）的正确性有赖于每个坐标系的坐标轴彼此垂直。这样的坐标系称为**正交坐标系**。

现在我们回过头来再看Ⅰ.2.1 小节平面坐标变换的例子，这个简单的例子

使我们能够仅仅与二维坐标系打交道。在上述关系中的下标也只用取 1，2 两个值，从而变换矩阵式（Ⅰ.42）简化为

$$\boldsymbol{\lambda}=\begin{bmatrix}\lambda_{11} & \lambda_{12}\\ \lambda_{21} & \lambda_{22}\end{bmatrix}$$

四个矩阵元由三个正交条件相关联

$$\sum_i = \lambda_{ij}\lambda_{ik} = \delta_{jk} \qquad (j,k = 1,2)$$

因而便可确定变换只有一个独立参量。然而这一结论并不奇怪。从一个直角坐标系到另一个直角坐标系的二维变换与轴线在平面上的转动相对应（见图Ⅰ.8），而这种转动只需用一个量，即转动角 φ 就能完全确定。用单一参量表达时，变换方程为［参见式（Ⅰ.35a）和（Ⅰ.35b)］

$$x_1'=x_1\cos\varphi+x_2\sin\varphi$$
$$x_2'=-x_1\sin\varphi+x_2\cos\varphi$$

所以各矩阵元

$$\begin{aligned}&\lambda_{11}=\cos\varphi, \qquad \lambda_{12}=\sin\varphi\\&\lambda_{21}=-\sin\varphi, \qquad \lambda_{22}=\cos\varphi\end{aligned} \tag{Ⅰ.45}$$

从而矩阵 $\boldsymbol{\lambda}$ 可以写为

$$\boldsymbol{\lambda}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix} \tag{Ⅰ.46}$$

三个正交条件展开成方程

$$\lambda_{11}\lambda_{11}+\lambda_{21}\lambda_{21}=1$$
$$\lambda_{12}\lambda_{12}+\lambda_{22}\lambda_{22}=1$$
$$\lambda_{11}\lambda_{12}+\lambda_{21}\lambda_{22}=0$$

显然，矩阵式（Ⅰ.46）是满足这些条件的。因为使用式（Ⅰ.45）的矩阵元时，它们可化为恒等式

$$\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1$$
$$\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1$$
$$\cos\varphi\sin\varphi-\sin\varphi\cos\varphi=0$$

图Ⅰ.8 中的 P 点可以看作是由坐标原点 O 指向该点的矢量的端点。变换矩阵 $\boldsymbol{\lambda}$ 可以看作是作用于不带撇的系统即能使之变换到带撇系统的算符。这一过程可以用符号表达成

$$(\boldsymbol{r})'=\boldsymbol{\lambda r} \tag{Ⅰ.47}$$

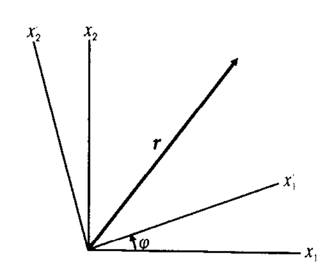
即矩阵 $\boldsymbol{\lambda}$ 作用于不带撇系统中矢量的分量上，即给出该矢量在带撇系统中的分量。应该指出的是，到目前为止，$\boldsymbol{\lambda}$ 只作用在坐标系上，矢量是不变的；我们想得到的只是它在两个不同坐标系中的分量。所以，为清楚起见，在式(Ⅰ.47) 左

边 $\boldsymbol{r}$ 旁边加上了一个括号，以表明方程两边所包含的是同一矢量，只是分量发生了变化。从二维情况下的简单例子已经看到，坐标变换仅仅是一次转动。因此，在这里 $\boldsymbol{\lambda}$ 等同于平面转动算符。

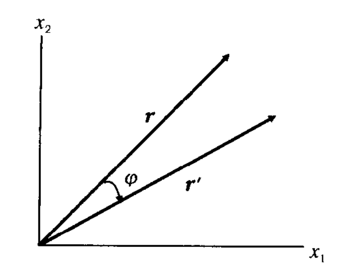
还须指出，即使数学形式不变，也可以把 $\boldsymbol{\lambda}$ 看作是作用在矢量 $\boldsymbol{r}$ 上并把它变换为另一矢量 $\boldsymbol{r}'$ 的算符

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{\lambda r} \qquad (\text{I}.48)$$

这里，两个矢量都以同一坐标系来表示。在二维情况下是把矢量 $\boldsymbol{r}$ 顺时针转过 φ 角，而不是逆时针转动坐标系以得出矢量 $\boldsymbol{r}'$。新矢量 $\boldsymbol{r}'$ 的各分量与原来那个矢量 $\boldsymbol{r}$ 的分量之间的联系由描述坐标变换的同一方程（Ⅰ.39）表示。所以，从形式上看，式（Ⅰ.47）不必使用括号。我们宁愿把它写成（Ⅰ.48）的形式，不论把它解释为对于坐标系的运算还是对矢量的运算都一样。在数学讨论中，可以自由选用任何一种解释，视情况是否合适而定。应该强调的是，$\boldsymbol{\lambda}$ 所代表的运算性质将决定于所选用的解释。比如说，如果把 $\boldsymbol{\lambda}$ 应用于坐标系时，它相当于逆时针转过角度 φ，如果把它应用于矢量时，则相当于顺时针转动角度 φ。



(a)　把正交变换解释为坐标轴的转动而矢量固定不动



(b)　把正交变换解释为矢量的转动而坐标系固定不动

图Ⅰ.9　正交变换的两种解释

变换作用的这两重性，在比正交换更为一般的其他坐标变换中也是经常出现的。有时可以把它们看作仅仅作用在坐标系上，以便用新的坐标系表示出某一给定的量或函数。而在另一些时候，又可以把它们看作是作用在那些量或函数上，使它们变换成相同坐标系中的新量。

Ⅰ.2.3 坐标变换的矩阵表示

式（Ⅰ.42）给出的矩阵 $\boldsymbol{\lambda}$，其行数与列数相等，因此称为方阵。矩阵并非必须是方的。一个点的坐标可以写作一个列矩阵

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{Ⅰ.49a}$$

或行矩阵

$$\boldsymbol{x} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3] \tag{Ⅰ.49b}$$

仅当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列数等于矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行数时，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的乘法才有意义。矩阵相乘的法则是

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}$$

$$C_{ij} = [AB]_{ij} = \sum_k A_{ik} B_{kj} \tag{Ⅰ.50}$$

从式（Ⅰ.50）可明显看出，矩阵乘法是不可对易的。

如果把点的坐标写成列矩阵，则式（Ⅰ.40）

$$x_i' = \sum_j \lambda_{ij} x_j \tag{Ⅰ.51a}$$

等价的矩阵表达式为

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{\lambda x} \tag{Ⅰ.51b}$$

即

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{Ⅰ.51c}$$

$$\begin{aligned} x_1' &= \lambda_{11} x_1 + \lambda_{12} x_2 + \lambda_{13} x_3 \\ x_2' &= \lambda_{21} x_1 + \lambda_{22} x_2 + \lambda_{23} x_3 \\ x_3' &= \lambda_{31} x_1 + \lambda_{32} x_2 + \lambda_{33} x_3 \end{aligned} \tag{Ⅰ.51d}$$

下面我们再介绍一下转置矩阵、单位矩阵和逆矩阵的定义。

转置矩阵是把原矩阵的行与列相互交换而得到的矩阵。矩阵 $\boldsymbol{\lambda}$ 的转置记作 $\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}$。根据定义

$$\lambda_{ij}^{\mathrm{T}} = \lambda_{ji} \tag{Ⅰ.52}$$

显然

$$(\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\lambda} \tag{Ⅰ.53}$$

因此式（Ⅰ.41）可以写成下列等价式中的任意一个

$$x_i = \sum_j \lambda_{ji} x_j' \tag{Ⅰ.54a}$$

$$x_i = \sum_j \lambda_{ij}^{\mathrm{T}} x_j' \tag{Ⅰ.54b}$$

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}' \tag{Ⅰ.54c}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{21} & \lambda_{31} \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} & \lambda_{32} \\ \lambda_{13} & \lambda_{23} & \lambda_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} \tag{Ⅰ.54d}$$

单位矩阵定义为这样的矩阵：当它乘以任一矩阵，或者任一矩阵乘以它，被它乘的矩阵均保持不变，即

$$\boldsymbol{IA} = \boldsymbol{A}; \qquad \boldsymbol{BI} = \boldsymbol{B} \tag{Ⅰ.55}$$

亦即上式第一式为

$$\boldsymbol{IA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{A} \tag{Ⅰ.56}$$

考虑二维情况下的正交旋转矩阵 $\boldsymbol{\lambda}$

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{bmatrix}$$

则有

$$\boldsymbol{\lambda\lambda}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{21} \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \lambda_{11}^2 + \lambda_{12}^2 & \lambda_{11}\lambda_{21} + \lambda_{12}\lambda_{22} \\ \lambda_{21}\lambda_{11} + \lambda_{22}\lambda_{12} & \lambda_{21}^2 + \lambda_{22}^2 \end{bmatrix}$$

应用正交关系式（Ⅰ.44）可得

$$\lambda_{11}^2 + \lambda_{12}^2 = \lambda_{21}^2 + \lambda_{22}^2 = 1$$

$$\lambda_{21}\lambda_{11} + \lambda_{22}\lambda_{12} = \lambda_{11}\lambda_{12} + \lambda_{12}\lambda_{22} = 0$$

所以对正交变换矩阵 $\boldsymbol{\lambda}$ 这种特殊情况则有

$$\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda\lambda}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{I} \tag{Ⅰ.57}$$

逆矩阵定义为当一矩阵与某矩阵之乘积为单位矩阵时，则称此矩阵为某矩阵之逆矩阵。矩阵 $\boldsymbol{\lambda}$ 的逆矩阵记作 $\boldsymbol{\lambda}^{-1}$，依据定义

$$\boldsymbol{\lambda\lambda}^{-1} = \boldsymbol{\lambda}^{-1}\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{I} \tag{Ⅰ.58}$$

比较式（Ⅰ.58）与（Ⅰ.57）得

$$\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\lambda}^{-1} \ （对正交矩阵） \tag{Ⅰ.59}$$

可见，变换矩阵 $\boldsymbol{\lambda}$ 的转置矩阵和逆矩阵是相同的。事实上，任意正交矩阵的转置矩阵均等于其逆矩阵。

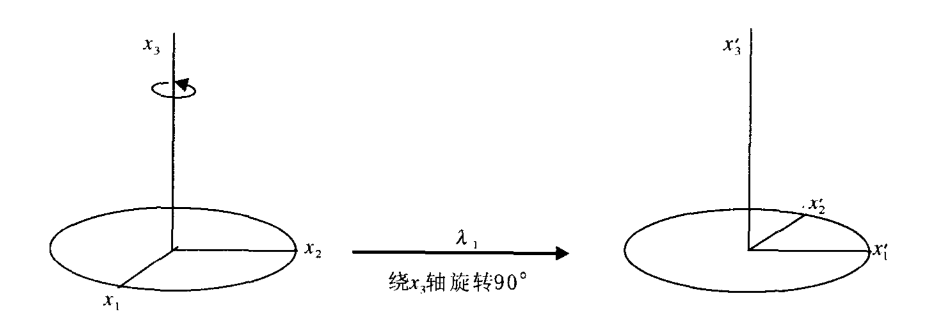
Ⅰ.2.4 变换矩阵的几何意义

下面我们举几个简单直观的例子来看一下变换矩阵的几何意义。

首先，我们考虑坐标轴绕 x_3 轴逆时针方向旋转 $\pi/2$ 的情况（见图Ⅰ.10）。经这一旋转后，$x'_1 = x_2$，$x'_2 = -x_1$，$x'_3 = x_3$。容易看到，除了下述三个方向余

弦不为零外，其余均为零

$$\cos(x_1', x_2) = 1 = \lambda_{12}$$
$$\cos(x_2', x_1) = -1 = \lambda_{21}$$
$$\cos(x_3', x_3) = 1 = \lambda_{33}$$



图Ⅰ.10　坐标系绕 x_3 轴旋转$\frac{\pi}{2}$

所以在这种情况下 λ 矩阵的具体形式为

$$\boldsymbol{\lambda}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{Ⅰ.60}$$

其次，考虑绕 x_1 轴逆时针旋转 $\pi/2$，如图Ⅰ.11 所示。经此旋转后，$x_1' = x_1$，$x_2' = x_3$，$x_3' = -x_2$。不为零的方向余弦仅有

$$\cos(x_1', x_1) = 1 = \lambda_{12}$$
$$\cos(x_2', x_3) = 1 = \lambda_{21}$$
$$\cos(x_3', x_2) = -1 = \lambda_{23}$$

所以在这种情况下 λ 矩阵的具体形式为

$$\lambda_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{Ⅰ.61}$$

为了求得先绕 x_3 轴旋转，然后又绕 x_1' 轴旋转的复合变换矩阵，我们有

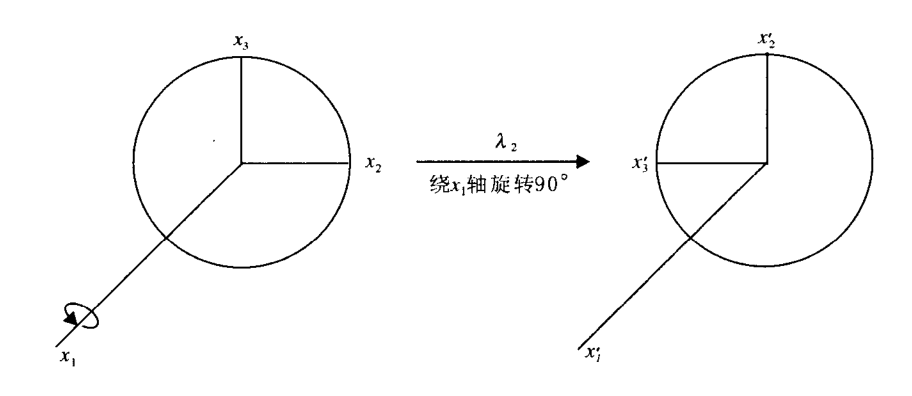
$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{\lambda}_1 \boldsymbol{x} \tag{Ⅰ.62a}$$

和

$$\boldsymbol{x}'' = \boldsymbol{\lambda}_2 \boldsymbol{x}' \tag{Ⅰ.62b}$$

$$\boldsymbol{x}'' = \boldsymbol{\lambda}_2 \boldsymbol{\lambda}_1 \boldsymbol{x} \tag{Ⅰ.62c}$$

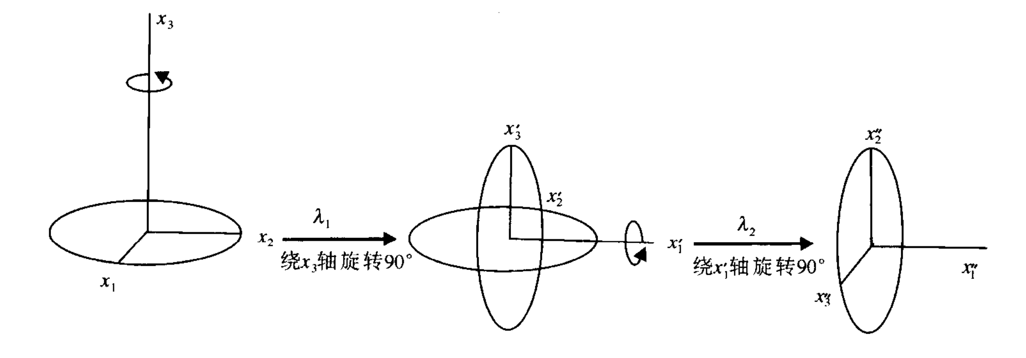
把矩阵具体写出来就是



图Ⅰ.11　坐标轴绕 x_1 轴旋转$\frac{\pi}{2}$

$$\begin{bmatrix} x''_1 \\ x''_2 \\ x''_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} \tag{Ⅰ.62d}$$



图Ⅰ.12　先绕 x_3 轴旋转$\frac{\pi}{2}$，再绕 x_1'轴旋转$\frac{\pi}{2}$

故上述两次旋转可用一个变换矩阵表示

$$\boldsymbol{\lambda}_3 = \boldsymbol{\lambda}_2 \boldsymbol{\lambda}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{Ⅰ.63}$$

两次旋转后的最终取向由 $x_1''=x_2$，$x_2''=x_3$，$x_3''=x_1$ 确定。

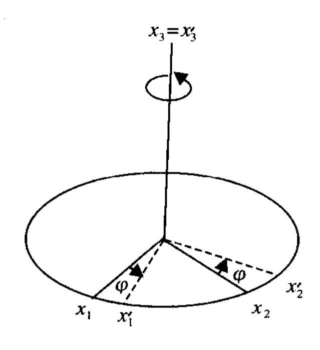
下面我们再来考虑图Ⅰ.13 的坐标旋转（与图Ⅰ.8 实质上是一样的），二维变换矩阵的矩阵元由下列方向余弦给出

$$\cos\ (x_1',\ x_1)\ =\cos\varphi=\lambda_{11}$$

$$\cos\ (x_1',\ x_2)\ =\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\sin\varphi=\lambda_{12}$$

$$\cos\ (x_2',\ x_1)\ =\cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)=-\sin\varphi=\lambda_{21}$$

$$\cos\ (x_2',\ x_2)\ =\cos\varphi=\lambda_{22}$$



图Ⅰ.13 坐标系绕 x_3 轴旋转 φ 角

所以二维变换矩阵为

$$\boldsymbol{\lambda}_4=\begin{bmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix} \tag{Ⅰ.64}$$

如果旋转是三维的，其中 $x_3'=x$，我们还得到以下方向余弦

$$\cos\ (x_1',\ x_3)\ =0=\lambda_{13}$$

$$\cos\ (x_2',\ x_3)\ =0=\lambda_{23}$$

$$\cos\ (x_3',\ x_3)\ =1=\lambda_{33}$$

$$\cos\ (x_3',\ x_1)\ =0=\lambda_{31}$$

$$\cos\ (x_3',\ x_2)\ =0=\lambda_{32}$$

三维变换矩阵即为

$$\boldsymbol{\lambda}_5=\begin{bmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{Ⅰ.65}$$

最后一个例子，考察所有坐标轴经原点的反射变换，通常称为**空间反射变换**。于是有

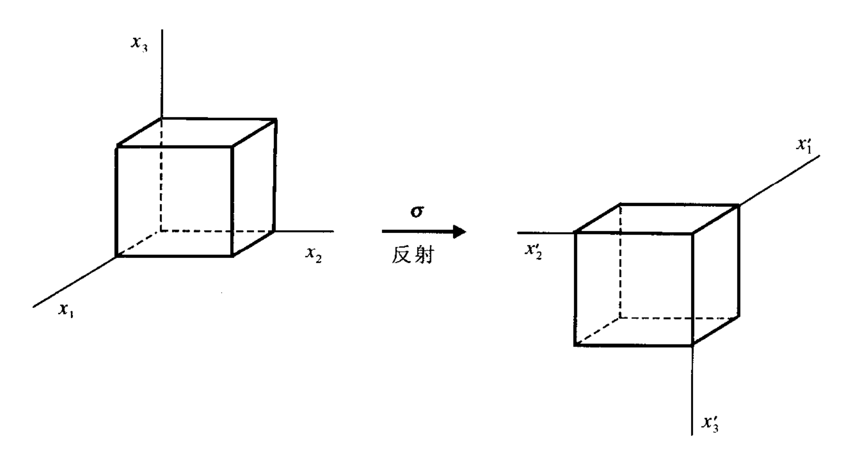
$$x_1'=-x_1,\qquad x_2'=-x_2,\qquad x_3'=-x_3$$

不为零的方向只有三个，且其值全为 −1

$$\cos\ (x_1',\ x_1)\ = -1 = \lambda_{11}$$
$$\cos\ (x_2',\ x_2)\ = -1 = \lambda_{22}$$
$$\cos\ (x_3',\ x_3)\ = -1 = \lambda_{33}$$

这种情况下的变换矩阵为

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{Ⅰ.66}$$



图Ⅰ.14　空间反射变换

Ⅰ.2.5 以变换性质表述的标量和矢量定义

设坐标 x_i 经下述变换变为 x_i'

$$x_i' = \sum_j \lambda_{ij} x_j' \tag{Ⅰ.67}$$

且变换矩阵满足正交条件

$$\sum_j \lambda_{ij} \lambda_{kj} = \delta_{ik} \tag{Ⅰ.68}$$

如果坐标经上述变换，量 $u(x)$ 的变换遵从如下的规律

$$u'(x') = u(x) \tag{Ⅰ.69}$$

则量 $u(x)$ 称为**标量**。注意：式中的宗量 x 是 x_1，x_2，x_3 的缩略写法。

如果量 $A_i(x)(i = 1,2,3)$ 在上述坐标变换中遵从下述规律变换

$$A_i'(x') = \sum_j \lambda_{ij} A_j(x) \tag{Ⅰ.70}$$

则量 $A =\ (A_1,\ A_2,\ A_3)$ 称为**矢量**。注意：矢量的分量是有一个指标的量；而

标量则无指标[①]。

Ⅰ.2.6 物理学中的常用矩阵

现在我们再简单介绍力学及物理学上常常还用到的一些有关矩阵的概念及性质，主要内容有对称及反对称矩阵，厄米矩阵，相似变换及由矩阵元素构成的行列式。

一个与它的转置相同的方阵，或者说，矩阵元素的指标交换后仍然相等的矩阵，即

$$A_{ij} = A_{ji} \tag{Ⅰ.71}$$

则称该矩阵是**对称矩阵**；当一个矩阵的转置是该矩阵的负值，也就是说当矩阵元素的指标交换后要改变符号，即

$$A_{ij} = -A_{ji} \tag{Ⅰ.72}$$

则称这种矩阵是**反对称矩阵**。显然，反对称矩阵的对角元素恒等于零。对于任何方阵 $\boldsymbol{A}$，定义为

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{s}} = \frac{1}{2}\ (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) \tag{Ⅰ.73}$$

的矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{s}}$ 是对称的，而相应的反对称矩阵定义为

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{a}} = \frac{1}{2}\ (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) \tag{Ⅰ.74}$$

显然可得

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{s}} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{a}} \tag{Ⅰ.75}$$

以及

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{s}} - \boldsymbol{A}^{\mathrm{a}} \tag{Ⅰ.76}$$

将矩阵转置再取复共扼，称之为**伴矩阵**，通常均以剑号标记

$$\boldsymbol{A}^{\dagger} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{*} \tag{Ⅰ.77}$$

这里的星号“*”按惯例表示复共轭。与正交矩阵的定义式（Ⅰ.57）相类似，如果矩阵 A 满足条件

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\dagger} = \boldsymbol{I} \tag{Ⅰ.78}$$

则 $\boldsymbol{A}$ 称为**幺正矩阵**。

在本书的第六章确定刚体取向的问题中，$\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{x}'$ 都是实矩阵，所以变换矩阵 $\boldsymbol{\lambda}$ 也必定是实矩阵。这使正交性质和幺正性质之间，或者转置矩阵与伴矩阵之间不再有什么区别。简而言之，一个实正交矩阵是幺正矩阵。但在有些问题中会引进复矩阵，在这些地方差别就相当显著。转置矩阵的许多性质与伴矩阵的性质明显地相似。但应注意的是，矢量矩阵的伴矩阵并不等效于矢量，这是因为还可能

① 张量是一个有 N 个指标（下标或上标）遵从一定变化规律的量。标量和矢量是张量中两个非常重要的特例。实际上标量是零阶张量，而矢量是一阶张量。

有复共轭的影响。与自己的伴矩阵恒等的矩阵，即

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{\dagger}$$

称为**自伴矩阵或厄米矩阵**。

把算符理解为用来变换矢量，或者用来变换坐标系的这两种解释，在我们寻求坐标系变换情况下的算符变换时都会涉及。设 $\boldsymbol{A}$ 是作用在矢量 $\boldsymbol{R}$（或单列矩阵 $\boldsymbol{R}$）上以产生矢量 $\boldsymbol{G}$ 时所用的算符

$$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{AR}$$

如果用矩阵 $\boldsymbol{B}$ 来变换坐标系，则矢量 $\boldsymbol{G}$ 在新坐标系的分量将满足关系式

$$\boldsymbol{BG} = \boldsymbol{BAR}$$

此式也可以写成

$$\boldsymbol{BG} = \boldsymbol{BAB}^{-1}\boldsymbol{BR} \tag{Ⅰ.79}$$

式（Ⅰ.79）可解释为：将算符 $\boldsymbol{BAB}^{-1}$作用于新坐标系表示的矢量 $\boldsymbol{R}$ 上，就产生同样以新坐标表示的矢量 $\boldsymbol{G}$，所以我们可把 $\boldsymbol{BAB}^{-1}$看作是变换到新坐标时算符 $\boldsymbol{A}$ 所取的形式

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{BAB}^{-1} \tag{Ⅰ.80}$$

式（Ⅰ.80）形式的变换称为**相似变换**。

下面来考虑由方阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素组成行列式的性质。我们以 $\det\boldsymbol{A}$ 表示这种行列式。应该指出，矩阵乘法的定义与行列式乘法的定义相同。因而有

$$\det(\boldsymbol{AB}) = \det\boldsymbol{A}\cdot\det\boldsymbol{B}$$

由于单位矩阵的行列式等于 1。所以正交条件式（Ⅰ.57）的行列式形式为

$$\det\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\cdot\det\boldsymbol{A} = 1$$

由于行列互换而行列式的值不变，即

$$\det\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \det\boldsymbol{A} \tag{Ⅰ.81}$$

所以

$$(\det\boldsymbol{A})^2 = 1$$

从而

$$\det\boldsymbol{A} = \pm 1 \tag{Ⅰ.82}$$

这表明正交矩阵的行列式只能取 +1 或 −1 两个值。

若矩阵不是正交的，行列式就没有这样简单。然而可以证明，行列式的值在相似变换下是不变的。用 $\boldsymbol{B}$ 右乘变换矩阵式（Ⅰ.80），即得关系式

$$\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B} = \boldsymbol{BA}$$

而其行列式的乘积亦有

$$\det\boldsymbol{A}'\cdot\det\boldsymbol{B} = \det\boldsymbol{B}\cdot\det\boldsymbol{A}$$

由于 $\boldsymbol{B}$ 的行列式仅仅是一个数，而且不等于零①，所以可将上式两端除以 $\det\boldsymbol{B}$，则得

$$\det\boldsymbol{A}' = \det\boldsymbol{A} \tag{Ⅰ.83}$$

可见，矩阵经相似变换后行列式的值不变。

Ⅱ 张 量

标量，矢量和用类似于式（Ⅰ.70）的变换式所确定的更复杂的量构成一类，而标量和矢量只是这类量中的特殊代表。这一类量称为**张量**。张量这一术语可能是由于最早这类量之一曾用来研究弹性体中一点的应力而得名。

一切张量均由标量组所确定，这些标量称为张量的分量（元素）。矢量的分量就是张量分量的例子。

张量的基本性质可用它们从一个坐标系变换到另一个坐标系的变换规律来表示。这些规律对一切张量都适用，而与它们的物理性质无关。

在三维空间中，N 阶张量 $\{T\}$ 有 3^N 个分量 $T_{ijk\cdots}$（具有 N 个指标），按照如下形式变换

$$T'_{ijk\cdots} = \sum_{l,m,n\cdots} \lambda_{il}\lambda_{jm}\lambda_{kn}\cdots T_{lmn\cdots} \tag{Ⅱ.1}$$

根据这个定义，零阶张量只有一个分量，它在进行正交变换时是不变的，即

$$T' = T \tag{Ⅱ.2}$$

所以，标量是零阶张量。

一阶张量有三个分量，其变换形式为

$$T'_i = \sum_j \lambda_{ij} T_j \tag{Ⅱ.3}$$

将它和矢量变换方程（Ⅰ.70）相比较可知，矢量是一阶张量。

二阶张量应有九个分量，其变换形式为

$$T'_{ij} = \sum_{k,l} \lambda_{ik}\lambda_{jl} T_{kl} \tag{Ⅱ.4}$$

如果

$$T_{ij} = T_{ji} \tag{Ⅱ.5}$$

则称其为二阶对称张量，倘若

$$T_{ij} = -T_{ji} \tag{Ⅱ.6}$$

称其为二阶反对称张量。在三维空间中，二阶反对称张量与矢量等价。定点转动刚体的瞬时角速度是二阶反对称张量最简单的例子。

---

① 如果它等于零，就不能有逆算符 $\boldsymbol{B}^{-1}$

张量和矩阵分别属于不同类型的数学课题。张量只是根据它在正交坐标变换下的变换性质来定义的。可是，矩阵却不受制于它所经历的变换类型。也就是说，我们考虑矩阵时完全可以不管它所经历的变换类型。在本课程所涉及的范围内，无需过分强调这个差别。它们在正交变换下，实际上是一致的。张量分量和矩阵元素以相同的方式处理。对于每一个张量方程都将有一个矩阵方程与之对应，反之亦然。例如，已知一个矢量（它是一阶张量）的全部分量构成一个列矩阵，矢量运算完全可以用这些相关的矩阵来处理。

Ⅲ　不同坐标系中的微分关系

Ⅲ.1 直角坐标系

$$\mathrm{grad}U = \nabla U = \sum_i \boldsymbol{e}_i \frac{\partial U}{\partial x_i} \tag{Ⅲ.1}$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = \nabla \cdot \boldsymbol{A} = \sum_i \frac{\partial A_i}{\partial x_i} \tag{Ⅲ.2}$$

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{A} \equiv \mathrm{rot}\boldsymbol{A} = \nabla \times \boldsymbol{A} = \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial A_k}{\partial x_j} \boldsymbol{e}_i \tag{Ⅲ.3}$$

$$\nabla^2 U = \nabla \cdot \nabla U = \sum_i \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2} \tag{Ⅲ.4}$$

Ⅲ.2 柱面坐标系

$$x_1 = \rho\cos\varphi, \qquad x_2 = \rho\sin\varphi, \qquad x_3 = z \tag{Ⅲ.5}$$

$$\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \qquad \varphi = \arctan\frac{x_2}{x_1}, \qquad z = x_3 \tag{Ⅲ.6}$$

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\rho^2 + \rho^2\mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}z^2 \tag{Ⅲ.7}$$

$$\mathrm{d}v = \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z \tag{Ⅲ.8}$$

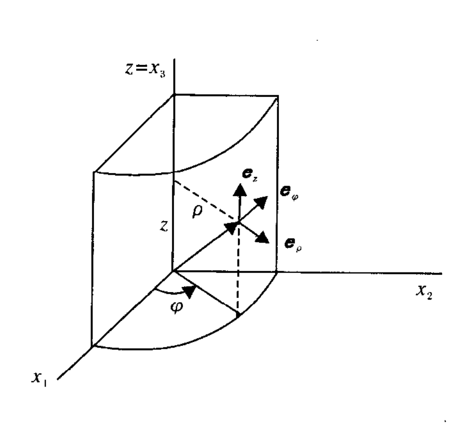
$$\mathrm{grad}\psi = \nabla\psi = \boldsymbol{e}_\rho \frac{\partial\psi}{\partial\rho} + \boldsymbol{e}_\varphi \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial\psi}{\partial z} \tag{Ⅲ.9}$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = \nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{Ⅲ.10}$$

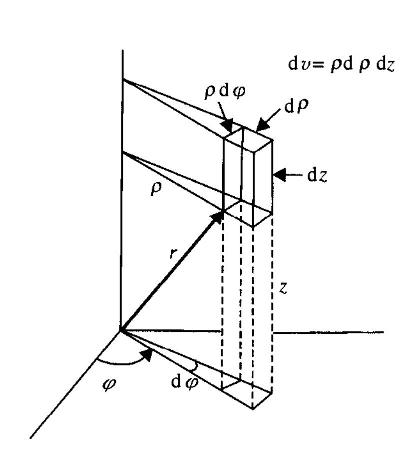
$$\begin{aligned}\mathrm{curl}A &= \mathrm{rot}\boldsymbol{A} = \nabla \times \boldsymbol{A} \\ &= \boldsymbol{e}_\rho\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right) + \boldsymbol{e}_\varphi\left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right) + \boldsymbol{e}_z\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\varphi) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}\right]\end{aligned} \tag{Ⅲ.11}$$

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \tag{Ⅲ.12}$$

在平面极坐标中 $dA = r dr d\theta$

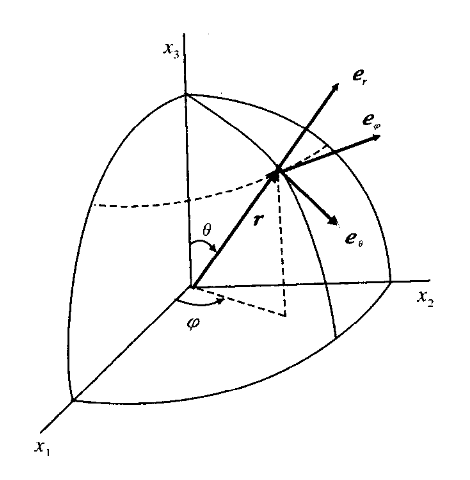


图Ⅲ.1　柱面坐标系

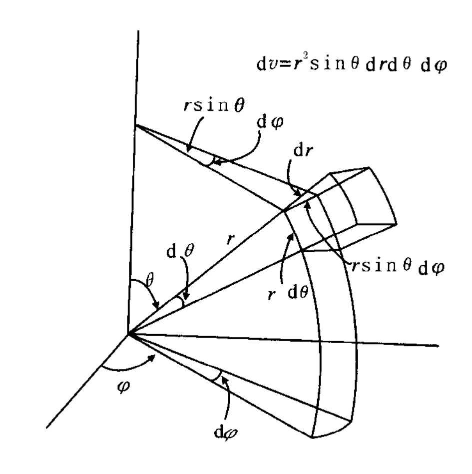


图Ⅲ.2　柱面坐标系的体积元

Ⅲ.3 球面坐标系



图Ⅲ.3　球面坐标系



图Ⅲ.4　球面坐标系的体积元

$$x_1 = r\sin\theta\cos\varphi,\qquad x_2 = r\sin\theta\sin\varphi,\qquad x_3 = r\cos\theta \tag{Ⅲ.13}$$

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2},\qquad \theta = \arccos\frac{x_3}{r},\qquad \varphi = \arctan\frac{x_2}{x_1} \tag{Ⅲ.14}$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2 \tag{Ⅲ.15}$$

$$dv = r^2\sin\theta dr d\theta d\varphi \tag{Ⅲ.16}$$

$$\mathrm{grad}\psi = \nabla\psi = \boldsymbol{e}_r \frac{\partial\psi}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \boldsymbol{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} \tag{Ⅲ.17}$$

$$\mathrm{div}A = \nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta\sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} \tag{Ⅲ.18}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{curl}\boldsymbol{A} &= \mathrm{rot}\boldsymbol{A} = \nabla\times\boldsymbol{A} \\ &= \boldsymbol{e}_r \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\varphi\sin\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right] \\ &\quad + \boldsymbol{e}_\theta \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \sin\theta\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\right] \\ &\quad + \boldsymbol{e}_\varphi \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\end{aligned} \tag{Ⅲ.19}$$

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} \tag{Ⅲ.20}$$

Ⅳ　非线性微分方程解的稳定性

微分方程，就是一个或几个包含自变量、未知函数以及未知函数的某些微商的方程式。只含一个自变量的微分方程称为**常微分方程**。自变量多于一个的称为**偏微分方程**。如果方程对于未知函数和它的各阶微商的全体而言是一次的，就称其为**线性微分方程**；否则就称为**非线性微分方程**。如果方程中不显含时间，则称为**自治方程**，否则称**非自治方程**，方程中所含未知函数微商的最高阶称其为这个方程或方程组的**阶**。所有常见的非线性常微分方程都可以化为自治的一阶常微分方程组，这是因为对于高阶自治方程，只要把各阶导数视作新的变量即可。

设我们所讨论的动力学系统可以用如下的一阶自治方程组表示：

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_j) \qquad i,j = 1,2,\cdots,n \tag{Ⅳ.1}$$

其中，n 为方程组中变量的个数。人们常常采用变量 x_1，x_2，…，x_n 构成的**相空间**（或称**状态空间**）来描述系统的运动。于是，系统每一时刻的状态用相空间的一点表示，态随时间变化则是相空间一条曲线。此相轨线通常也称**轨道**，也就是**积分曲线**。

方程（Ⅳ.1）中，当

$$f_i(x_j) = 0, \qquad i,j = 1,2,\cdots,n \tag{Ⅳ.2}$$

即

$$\frac{dx}{dt} = 0, \qquad i = 1,2,\cdots,n \tag{Ⅳ.2a}$$

时，系统的状态 x_1，x_2，…，x_n 不随时间变化。我们称满足式（Ⅳ.2）的状态

为**定态**。人们通常习惯上所说的“平衡态”实则都是指这里所说的定态。所以要注意区分物理学中所说的平衡态与人们习惯所说的平衡态之间含义的区别。定态不一定都是物理上的平衡态，如稳恒的物质流或热流等都是在定态下进行的。物理上所说的平衡态不能有“流”，故此时系统亦是处于非平衡态。这就是所谓**非平衡定态**。

由式（Ⅳ.1）和（Ⅳ.2）可知，相空间中的轨道在定态的代表点处的斜率不定，这种斜率不定的点称为**奇点**。由于定态对应着相空间的奇点，所以奇点又称为**定点**。

非线性方程的解的形式，除了稳定定态解外，大体上还有发散解，周期解和混沌解等诸形式。而周期解或混沌解存在与否跟定态解的稳定性有关，因此判断定态解的稳定性便有非常重要的意义，为此给出如下定义：

(1) 设方程（Ⅳ.1）的解为 $\boldsymbol{x}_0(t_0)$（为简单计，这里用矢量 $\boldsymbol{x}$ 表示 x_i，$i=1, 2, \cdots, n$）。若系统受到扰动而偏离此解的另一解为 $\boldsymbol{x}(t_0)$，如果对于任意小的数 $\varepsilon>0$，总有一小数 η（ε，t_0）>0 存在，使得当

$$|\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}(t_0)|<\eta \tag{Ⅳ.3}$$

必有

$$|\boldsymbol{x}(t_0)-\boldsymbol{x}(t_0)|<\varepsilon \qquad (t_0<t<\infty) \tag{Ⅳ.4}$$

则称解 $\boldsymbol{x}(t)$ 是**李雅普诺夫稳定的**，也经常简单地说是**稳定的**。

(2) 如果解 $\boldsymbol{x}_0(t)$ 是稳定的，且

$$\lim_{t\to\infty}|\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}(t_0)|=0 \tag{Ⅳ.5}$$

则称此解是**渐近稳定的**。

(3) 不满足李雅普诺夫稳定的解称为**不稳定解**

若为李雅普诺夫稳定时，在扰动或初始条件发生微小的变化时，其解不至于发生太大的偏离；在渐近稳定条件下，即使受到扰动，系统最终仍将回到无扰动时的解；在不稳定的情况下，初始条件的适当改变（如大于 η）就足以使解的偏离超出任意给定的范围。

按照上述定义，稳定定态解是渐近稳定的；周期解和混沌解（通常也将二者合起来称为振荡解）是李雅普诺夫稳定的，但不是渐近稳定的，因为，始终是限定在一定范围内；发散解自然是不稳定的。

设 x_{i0}为非线性方程（Ⅳ.1）的一个解（$i=1, 2, \cdots, n$，为方便计，以后写方程和解时均从略）。令 $x_i(t)$ 为在此解附近的另一解

$$x_i(t)=x_{i0}(t)+\xi_i(t) \tag{Ⅳ.6}$$

$x_{i0}(t)$ 称为参考解，相应的态称为参考态，ξ_i 为态 $x_i(t)$ 对参考态的偏离。将式（Ⅳ.6）代入式（Ⅳ.1）得

$$\frac{\mathrm{d}x_{i0}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\xi_i}{\mathrm{d}t}=f_i(x_j)=f_i(x_{j0}+\xi_j)=f_i(x_{j0})+\sum_j^n\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_0\xi_j \qquad (\text{Ⅳ}.7)$$

下标 0 表示在参考态处取值。由式（Ⅱ.2）两端比较可得

$$\frac{\mathrm{d}\xi_i}{\mathrm{d}t}=\sum_{j=1}^n\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_0\xi_j \qquad (\text{Ⅳ}.8)$$

此式就是非线性方程（Ⅳ.1）在参考态附近的线性化方程。为了分析定态的稳定性及定态邻域解的性态，通常都是取定态作为参考态。显然，原点（$\xi_i=0$）是线性化方程的平凡解，此平凡解就代表原来非线性方程的参考态。著名数学家李雅普诺夫证明了如下的**线性稳定性定理**：

如果非线性方程（Ⅳ.1）的线性化方程（Ⅳ.8）的原点（平衡点）是渐近稳定的，则参考态（x_{i0}）是非线性方程（Ⅳ.8）的渐近稳定解；如果线性化方程的原点是不稳定的，则参考态也是非线性方程的不稳定解。

根据李雅普诺夫线性稳定性定理，我们可以由线性化方程解的稳定性来分析原来非线性方程解（参考态，通常是指定态或定点）的稳定性。而线性方程易于求解，也容易分析其解的性态。

为了求解线性方程（Ⅳ.8）并分析其解的稳定性，我们这里先就两个变量的情形进行研究，其结果不难推广到多变量的情形。当只有两个变量时，式(Ⅳ.8)取如下简单形式：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\xi_1}{\mathrm{d}t}&=a_{11}\xi_1+a_{12}\xi_2\\ \frac{\mathrm{d}\xi_2}{\mathrm{d}t}&=a_{21}\xi_1+a_{22}\xi_2\end{aligned} \qquad (\text{Ⅳ}.9)$$

式中

$$a_{ij}=\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right) \qquad i,j=1,2 \qquad (\text{Ⅳ}.10)$$

线性方程（Ⅳ.9）解的一解形式为

$$\begin{aligned}\xi_1&=c_1A_1\mathrm{e}^{\lambda_1t}+c_2A_2\mathrm{e}^{\lambda_2t}\\ \xi_2&=c_2B_1\mathrm{e}^{\lambda_1t}+c_2B_2\mathrm{e}^{\lambda_2t}\end{aligned} \qquad (\text{Ⅳ}.11)$$

式中系数 c_1 和 c_2 由初始条件决定。

由式（Ⅳ.11）可以立即得到关于线性方程（Ⅳ.9）的解 ξ_i 和非线性方程（Ⅳ.1）（$n=2$ 的情形）的解（它的参考态或定态 x_{i0}）的稳定性的三种情形：

（1）如果 λ_1 和 λ_2 的实部都是负的，则

$$\lim_{t\to\infty}|\xi_i|=0$$

即解 ξ_i 是渐近稳定的，根据前述的线性稳定性定理，非线性方程（Ⅳ.1）的参考态（或定态）也是渐近稳定的。

（2）如果 λ_1 和 λ_2 中至少有一个的实部是正的，则

$$\lim_{t\to\infty}\left|\xi_i\right| = \infty$$

即 ξ_i 是不稳定的，从而非线性方程的解 x_{i0} 也是不稳定的。

（3）如果 λ_1 和 λ_2 中至少有一个的实部等于零，另一个实部也是负的，则 ξ_i 是稳定的，但不是渐近稳定的，从而这时的非线性方程的参考态 x_{i0} 处于临界情形。